Opérateurs pseudodifférentiels

Table des matières

1 Introduction

Les opérateurs différentiels à coefficients variables classiques sont de la forme :

$$p(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a(x)\partial_x^\alpha$$

où $x \in \mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ et $D_x = \frac{1}{i}\partial_x$
L'action de cet opérateur correspond à multiplier la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathscr{S}'$ par le polynôme : $p(x, \xi)$. Les opérateurs pseudodifférentiels généralisent ce procédé à des fonctions non nécessairement polynomiales.

2 Définition et propriétés de base

Pour pouvoir définir des opérateurs dont les propriétés prolongent celles des opérateurs différentiels, on définit des fonctions dont le comportement est proche de celui des polynômes. On définit ainsi la classe S^m des symboles d'ordre m. Elle contient entre autres les polynômes de degré m.
Définition : Soit $m \in \mathbb{R}$. On note $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\forall \alpha, \forall \beta, \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

On note de plus $S^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m$.

ON notera que S^m contient aussi les fonctions homogènes de degré m pour ξ grand.
On munit S^m d'une structure d'espace de Fréchet en le munissant des semi-normes correspondant à la plus petite constante $C_{\alpha,\beta}$ admissible dans (1).

Propriétés :
Si $a \in S^m, \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in S^{m-|\beta|}$
Si $a \in S^m, b \in S^{m'}$, alors $ab \in S^{m+m'}$
Si $a_1, ..., a_k \in S^0$ et $F \in C^\infty(\mathbb{C}^k)$, alors $F(a_1, ..., a_k) \in S^0$.

2.1 Opérateurs pseudodifférentiels dans $\mathscr{S}$

On va définir un opérateur comme la "multiplication" de la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathscr{S}$ par un élément de S^m
Proposition : Si $a \in S^m$ et $\varphi \in \mathscr{S}$, alors la formule :

$$a(x,D)\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x|\xi\rangle} a(x,\xi)\widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

définit bien un opérateur de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ continu par rapport à a et à φ.

On dispose d'autres moyens de décrire les opérateurs pseudodifférentiels,en particulier à travers la description de leur noyau de Schwartz.

2.2 Noyau de Schwartz

Pour un opérateur A de $C_0^\infty(\Omega_2) \to D'(\Omega_1)$, on appelle noyau de A la distribution $K(x,y) \in \mathscr{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que

$$\langle Av, u\rangle = \langle K, u \otimes v\rangle \,, \forall\ u \in C_0^\infty(\Omega_1), \forall\ v \in C_0^\infty(\Omega_2)$$

Pour un symbole a dans $S^{-\infty}$, on a une écriture simple du noyau de $a(x,D)$:

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y|\,\xi\rangle} a(x,\xi) d\xi$$

Ceci est parfaitement défini si a appartient à $S^{-\infty}$ puisque l'intégrale est absolument convergente, on a alors $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. On va pourtant pouvoir définir le noyau de $a(x,D)$ par cette formule pour un a dans un S^m avec m quelconque dans $\mathbb{R}$. On aura pour cela besoin de la notion d'intégrale oscillante. Ceci est en fait une généralisation des intégrales du type $\int \frac{sin\ x}{x}$.

2.3 Intégrales oscillantes

Notre but est de définir $\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(\theta)} a(\theta)\ d\theta$. On a besoin que φ soit réelle et varie rapidement à l'infini et que a soit à croissance suffisemment lente, notion que l'on va préciser.

Définition : Soit $\rho \in]-\infty, 1], m \in \mathbb{R}$, on définit

$$A_\rho^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\ tq\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N\ |\partial^\alpha a(\theta)| \leq C_\alpha (1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|} \right\}$$

On note d'autre part $A_\rho^{+\infty} = \bigcup_m A_\rho^m$
On munit ces espaces des semi-normes naturelles :

$$N_{\rho,k}^m(a) = \sup_{|\alpha|\leq k,\ \theta \in \mathbb{R}^N} (1+|\theta|)^{-m+\rho|\alpha|}\, |\partial^\alpha a(\theta)|$$

On remarque que l'intégrale $I_{\varphi(a)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(\theta)} a(\theta)\ d\theta$ est bien définie pour $a \in A_\rho^m$, $m < -N$.

Théorème : Si $d_\theta \varphi \neq 0$ pour $\theta \neq 0$, et φ réelle, homogène de degré μ, $\mu > 1-\rho$, alors l'intégrale $I_{\varphi(a)}$ peut être prolongée à des symboles dans $A_\rho^m(\mathbb{R}^N)$ avec m quelconques. Ce prolongement est unique par densité de $\mathscr{S} = \bigcap_m A_\rho^m$ dans chacun des A_ρ^m.

Démonstration (ou idée de) : On pose $a \in \mathscr{S}$. On obtient des majorations qui vont nous permettre d'étendre la définition pour m quelconque. On utilise une partition dyadique de l'unité dans $\mathbb{R}^N$:

$$1 = \chi_0(\theta) + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\theta) \qquad\qquad \chi_0\ , \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

On montre facilement que l'on peut obtenir une telle partition avec un χ de support la couronne $\{\theta; |\theta| \in [1/2, 2]\}$ et un χ_0 de support la boule centrée en 0 de rayon 2.

$$I_\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(\theta)}\chi_0(\theta)a(\theta) + \sum_{p=0}^{\infty} e^{i\varphi(\theta)}\chi(2^{-p}\theta)\ a(\theta)\ d\theta$$

Le changement de variable $\theta \mapsto 2^p\theta$ nous amène à sommer :

$$I_p = 2^{Np} \int \underbrace{e^{i2^{p\mu}\varphi(\theta)}}_{par\ homogénéité} \chi(\theta)a(2^p\theta)\ d\theta \qquad p \in \mathbb{N}$$

Pour majorer ces termes, on utilise un lemme, dit de la "phase non stationnaire" :

Lemme : Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, réelle telle que $|\varphi(\theta)| \geq c_0 > 0$ sur K, Alors, $\forall a \in C_0^\infty(K)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall \lambda \geq 1\ :\ \lambda^k \left| \int e^{i\lambda\varphi(\theta)}\ a(\theta)\ d\theta \right| \leq C_{k+1}(\varphi)\ C(c_0, K)\ \sup_{\alpha \leq k} |\partial^\alpha a|$$

où $C_{k+1}(\varphi)$ reste bornée lorsque φ reste bornée dans $C^{k+1}(K)$.
Pour démontrer ce lemme, on va faire l'équivalent d'une intégration par partie : l'opérateur $L = -i\ |\varphi'|^{-2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial \theta_j}$ vérifie $L(e^{i\lambda\varphi}) = \lambda e^{i\lambda\varphi}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \left|\lambda^k \int e^{i\lambda\varphi}\ a\ d\theta\ \right| &= \left| \int e^{i\lambda\varphi} ({}^tL)^k(a)\ d\theta \right| \\ &\leq |K| \sup_K \left| ({}^tL)^k a \right| \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\left|({}^tL)^k a\right| \leq C_{k+1}(\varphi) \sup_{K, \alpha\leq k} |\partial^\alpha a|$.

On retourne à la preuve du théorème, en utilisant le lemme avec $\lambda = 2^{p\mu}$, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} |I_p| &= \left| 2^{Np} \int e^{i2^{p\mu}\varphi(\theta)}\chi(\theta)\ a(2^p\theta)\ d\theta \right| \\ &\leq C_{k+1}\ 2^{Np}2^{-p\mu k} \sup_{|\alpha|\leq k,\ 1/2\leq|\theta|\leq 2} 2^{p|\alpha|} \underbrace{|\partial^\alpha a(2^p\theta)|}_{\leq N^m_{\rho,k}(a)(1+2^p|\theta|)^{m-\rho|\alpha|}} \\ &\leq C_{k+1}\ 2^{p(N-\mu k+m+(1-\rho)k)} N^m_{\rho,k}(a) \end{aligned}$$

Ensuite, si on choisit k suffisamment grand (c'est à dire si on dérive a suffisamment), on peut obtenir $N + m - k(\mu - 1 + \rho) < 0$ (car $\mu > 1 - \rho$, c'est à dire que "φ oscille plus vite que a"). La série des I_j est alors convergente est on obtient la majoration $I_\varphi(a) \leq CN^m_{\rho,k}(a)$, qui permet d'étendre l'intégrale à tout a de A^m_ρ par densité.

Remarque : on peut alors facilement voir que

$$I_\varphi(a) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int e^{i\varphi(\theta)}a(\theta)\chi(\epsilon\theta)\ d\theta$$

avec $\chi \in \mathscr{S}$ telle que $\chi(0) = 1$ (car on a alors $a(\theta)\chi(\epsilon\theta) \overset{\epsilon \to 0^+}{\longrightarrow}_{A^{m'}_\rho} a(\theta)$ pour tout $m' > m$).
Cette définition permet de montrer que la majorité des propriétés qui sont vraies pour des intégrales classiques le sont aussi pour les intégrales oscillantes : théorème de Fubini, intégration par partie, changements de variable homogène, régularité par rapport à un paramètre et dérivation sous le signe intégrale.

Cette définition de l'intégrale oscillante ne permet de définir le noyau de Schwartz d'un opérateur pseudodifférentiel que pour $x \neq y$. On peut aussi définir une notion d'intégrale oscillante plus générale où la phase φ dépend aussi d'un paramètre x : $I_\varphi(a)(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) d\ \theta$. Sous certaines conditions sur φ et sur a, on obtient alors que $I_\varphi(a) \in \mathscr{D}'(\Omega)$. C'est cette notion qui permet d'écrire le noyau de Schwartz sous sa forme intégrale pour tout opérateur pseudodifférentiel.

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y \mid \xi\rangle} a(x,\xi) d\xi$$

2.4 Sommes asymptotiques

Une série de Taylor constitue une approximation locale d'une fonction. Dans S^m, c'est le comportement à l'infini en ξ qui est important puisque c'est en fait le degré de croissance à l'infini en ξ qui détermine le degré de régularité de l'opérateur. La connaissance de symbole dans une classe modulo $S^{-\infty}$ est parfois suffisante pour l'étude des propriétés de l'opérateur. Dans ce cadre, on peut être amené à définir le symbole par une série asymptotique.

Soit $a_j \in S^{m_j}$ pour une suite décroissante $m_j \to -\infty$. On veut donner un sens à la série $\sum a_j$, même si la suite diverge. On peut le faire modulo un élément de $S^{-\infty}$: on écrira que

$$a \sim \sum a_j$$

si

$$\forall k \geq 0, a\ -\ \sum_{j=0}^{k} a_j \in S^{m_{k+1}}$$

Théorème : Il existe $a \in S^{m_0}$ tel que $a \sim \sum a_j$. Celui-ci est unique modulo $S^{-\infty}$

Idée de la démonstration : Si la série des a_j était convergente, il n'y aurait pas de problème. Pour forcer la convergence, on tronque en multipliant par une fonction de cut-off $(1 - \chi(\epsilon_j\xi))$: on garde en fait le comportement à l'infini en ne retirant qu'une fonction à décroissance très rapide. Alors, si ϵ_j tend vers 0 assez vite, on a les estimations souhaitées pour une série localement finie.

2.5 Adjoint d'un opérateur pseudodifférentiel

La représentation du noyau par intégrale oscillante permet de définir aisément l'adjoint d'un opérateur pseudodifférentiel. On peut montrer que pour un symbole a de $S^{-\infty}$, l'opérateur adjoint de a(x,D) est aussi un opérateur pseudodifférentiel dont le symble s'écrit sous la forme :

$$a^*(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-iy.\eta}\overline{a}(x-y,\xi-\eta)\ dy\ d\eta$$

La notion d'intégrale oscillante permet alors d'étendre cette formule à un symbole de S^m. On prouve alors que $a^*(x,\xi)$ appartient à S^m. Cette propriété permet alors de définir simplement un opérateur pseudodifférentiel de S' dans S'.
On montre aussi que a^* admet un développement asymptotique :

$$a^*(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\ D_x^\alpha \overline{a}(x,\xi)$$

On pourra remarquer que ces deux écritures sont intuitivement liées par l'écriture $a^*(x,\xi) = e^{iD_x.D_\xi}\overline{a}(x,\xi)$.

2.6 Composition d'opérateurs pseudodifférentiels

Si on considère $a_1, a_2 \in S^{-\infty}$, on obtient que la composition d'opérateurs pseudodifférentiels associés est un opérateur pseudodifférentiel de symbole :

$$a_1\#a_2 = (x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i(x-y).(\xi-\eta)}a_1(x,\eta)a_2(y,\xi)\ dy\ d\xi$$

De nouveau, la notion d'intégrale oscillante permet alors d'étendre cette formule à des symboles dans S^{m_1} et S^{m_2}, m_1 et m_2 quelconques. On prouve alors que la composée de deux opérateurs d'ordres m_1 et m_2 est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $m = m_1 + m_2$. On montre aussi que $a_1\#a_2$ a un développement asymptotique :

$$a_1\#a_2(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_1\ D_x^\alpha a_2.$$

De manière formelle, on écrit $a_1\#a_2(x,\xi) = e^{iD_y.D\eta}a_1(x,\eta)a_2(y,\xi)\big|_{\eta=\xi,y=x}$

3 Applications

3.1 Paramétrice d'un opérateur elliptique

Si $a \in S^m$ est telle qu'il existe $c > 0$ et C tels que $|a(x,\xi)| \geq c\,|\xi|^m$ pour $|\xi| \geq C$, on dit que a est elliptique.

Théorème Si a est elliptique, alors, il existe $b \in S^{-m}$ tel que $a(x,D)b(x,D) - Id \in Op(S^{-\infty})$.
Cette inversion n'est donc qu'une inversion modulo $S^{-\infty}$. Mais ce résultat est tout de même satisfaisant si on s'intéresse à la propagation des singularités. Or,

un élément de $Op(S^{-\infty})$ a un effet régularisant.

Démonstration : Pour $|\xi| \geq C$, on a $|a(x,\xi)| \geq c\,|\xi|^m$, donc $|a(x,\xi)| \times (1+|\xi|^2)^{-m/2} \geq C''$ où C'' est une autre constante . D'autre part, on a $a(x,\xi) \times (1+|\xi|^2)^{-m/2} \in S^0$.
On pose $b_0 = (1+|\xi|^2)^{-m/2}\ F(a \times (1+|\xi|^2)^{-m/2})$ où $F \in C^\infty(\mathbb{C})$, $F(z) = \frac{1}{z}$ pour $|z| \geq C''$.
On a alors $b_0 \in S^{-m}$ et $ab_0 = 1 + \chi(x,\xi)$ avec $\chi(x,\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq C$. Donc $\chi \in S^{-\infty}$
Au sens de la composition, on a alors : $a(x,D)b_0(x,D) = id - r(x,D)$ avec $r \in S^{-1}$ (c'est le terme d'ordre -1 du développement asymptotique de $a\#b_0$)
On pose alors $b_k(x,D) = b(x,D)\#r(x,D)^k \in Op(S^{-m-k})$
On vérifie alors que $b \sim \sum b_k$ convient :

$$\begin{aligned} AB &= A(B - \sum_{j<k} B_j) + A\sum_{j<k} B_j \\ &= A(B - \sum_{j<k} B_j) + AB\sum_{j<k} R^j \end{aligned}$$

Or $(B - \sum_{j<k} B_j) \in Op(S^{-m-k})$ par définition du développement asymptotique de B
De plus, $AB\sum_{j<k} R^j = (id-R)\sum_{j<k} R^j = \sum_{j<k} R^j - \sum_{j<k} R^(j+1) = id - R^k$
Donc

$$\begin{aligned} AB &= id - R^k + Op(S^{-k}) \\ &= id + Op(S^{-k}) \end{aligned}$$

Ce qui est vrai pour k quelconque, donc $AB = id + Op(S^{-\infty})$.

Remarque : on peut aussi définir des classes d'opérateurs $S^m_{\rho,\delta}$ qui vérifient :

$$\forall\alpha, \forall\beta, \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

Tous les résultats précédents s'appliquent alors de la même façon avec $\rho, \delta > 0$ et $\rho > \delta$.

3.2 Norme L^2 d'un opérateur pseudodifférentiel

On peut montrer de façon élémentaire en utilisant les résultats précédents (les sommes asymptotiques en particulier) que si $\rho, \delta > 0$ et $\rho > \delta$, alors un opérateur de symbole $a \in S^0_{\rho,\delta}$ peut être étendu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. De même, un opérateur de $Op(S^m)$, $m \neq 0$, peut être étendu de manière unique à un opérateur de H^s dans H^{s-m}.
Ce résultat est beaucoup plus complexe à démontrer si $\rho = \delta$. Une démonstration est due à A. P. Calderón et R. Vaillancourt en 1972 [5]. Une démonstration plus élémentaire a été donnée par I. L. Hwang en 1987. C'est en particulier l'étude de cet article [6] qui a occupé une partie de mon stage. Cette démonstration

n'utilise en effet aucun théorème avancé et n'utilise que des moyens élémentaires comme les intégrations par partie, la transformée de Fourier et la formule de Parseval.
En particulier, j'ai regardé dans quelle mesure cette démonstration peut être adaptée à des opérateurs plus généraux que les opérateurs pseudodifférentiels.

4 Norme L^2 d'un opérateur particulier

On s'intéresse à la norme L^2 d'un opérateur avec une phase légèrement différente : $\varphi(x,y,\xi) = i(x-y,\xi) + \Delta a(x,\xi)$ où $a(x,\xi)$ est dans S^0 et Δ est un réel que l'on peut rendre aussi petit que l'on veut.
De sorte, l'opérateur peut s'écrire :

$$g(x,D)u(x) = \iint e^{i(x-y,\xi)+\Delta a(x,\xi)} g(x,\xi)u(y)\ dy\ d\xi$$

Ce type de phase est utilisée en particulier en géophysique, en imagerie sismique. En particulier, dans des schémas numériques utilisant la transformée de Fourier, Δ représente le pas de discrétisation pour des schémas d'extrapolation d'ondes. On se limitera au cas de la dimension 1 pour simplifier les calculs et par manque de temps bien que l'on pense que la méthode puisse s'étendre au cas de dimensions supérieures. On suppose de plus que g, $\partial_x g$, $\partial_\xi g$ et $\partial_{x\xi} g$ bornés en norme infinie : on notera $\|g\|$ un majorant. Ceci est en particulier vérifié si $g \in S^0_{\rho,\delta}$ avec $\delta = 0$, $\rho \geq 0$. Le cas $\delta > 0$, $\delta = \rho$ se déduit de ce cas dans la démonstration de Hwang. On pourrait donc espérer en faire autant pour cette phase... De même, pour a, il faudra supposer $\partial_{x\xi} a$, $\partial_x^2 a$, $\partial_\xi^2 a$ et $\partial_\xi^2 \partial_x a$ majorés par un certain $\|a\|$. Ce qui est aussi le cas si $a \in S^0_{\rho,\delta}$ avec $\delta = 0$, $\rho \geq 0$. On fait aussi le choix de prendre a imaginaire pur. Nous allons suivre la démonstration de Hwang avec quelques modifications dues à la phase différente.
Remarque : dans toute la suite, on peut choisir $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$: comme on aura une majoration de la norme L^2 de $g(x,D)u(x)$ en fonction de celle de u, on pourra étendre le résultat à L^2 par densité. De sorte que toutes les intégrales considérés sont convergentes. On aurait aussi pu ne considérer les intégrales qu'au sens des intégrales oscillantes. Toutes les intégrales seraient alors bien définies dans ce sens et les majorations resteraient valables.

On utilise la propriété :

$$\frac{1}{1 + i(x-y) + \Delta\partial_\xi a(x,\xi)}\ (1+\partial_\xi) e^{i\varphi(x,y,\xi)} = e^{i\varphi(x,y,\xi)}.$$

On écrit alors l'intégration par partie :

$$\int e^{i(x-y,\xi)+\Delta a(x,\xi)} g(x,\xi)\ d\xi = \int e^{i(x-y,\xi)+\Delta a(x,\xi)}\ (1-\partial_\xi) \frac{g(x,\xi)}{1 + i(x-y) + \partial_\xi a(x,\xi)}\ d\xi$$

on obtient :

$$g(x,D)u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\varphi(x,y,\xi)} b(x,y,\xi)u(y) dy d\xi$$

où b se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
b(x,y,\xi) &= (1-\partial_\xi)\frac{g(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)} \\
&= \frac{g(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)} - \frac{\partial_\xi g(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)} + \frac{g(x,\xi)\Delta\partial_\xi^2 a(x,\xi)}{(1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi))^2} \\
&= (1)+(2)+(3)
\end{aligned}$$

Pour calculer la norme L^2 de cet opérateur, on va majorer pour un v dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'expression :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g(x,D)u(x)v(x)dx &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \iiiint e^{i\varphi(x,y,\xi)}e^{i(x,\lambda)}b(x,y,\xi)u(y)\hat{v}(\lambda)dyd\xi d\lambda dx \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \int\int\int\int e^{i(x,\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)}e^{-i(y,\xi)}b(x,y,\xi)u(y)\ \hat{v}(\lambda)\ dyd\xi d\lambda dx
\end{aligned}$$

Où

$$v(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \int e^{i(x,\lambda)}\hat{v}(\lambda)d\lambda$$

Notant $\psi(x,\lambda,\xi) = (x|\ \xi+\lambda) - i\Delta a(x,\xi)$, on réalise une intégration par partie en x en utilisant l'identité :

$$\frac{1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)}\ (1+\partial_x)e^{i\psi(x,\lambda,\xi)} = e^{i\psi(x,\lambda,\xi)}$$

et on obtient

$$\int e^{i\psi(x,\lambda,\xi)}b(x,y,\xi)dx = \int e^{i\psi(x,\lambda,\xi)}\ (1-\partial_x)\frac{b(x,y,\xi)}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)}dx.$$

Or

$$\begin{aligned}
& (1-\partial_x)\frac{b(x,y,\xi)}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} \\
=\ & \frac{b(x,y,\xi)}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} - \frac{\partial_x b(x,y,\xi)}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} + \frac{b(x,y,\xi)\ \Delta\partial_x^2 a(x,\xi)}{[1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)]^2} \\
=\ & A+B+C
\end{aligned}$$

On se retrouve donc avec 9 termes, en utilisant la décomposition de $b(x,y,\xi)$:
On pose

$$\begin{aligned}
h(x,\xi) &= \int \frac{1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)}\ e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)}\hat{v}(\lambda)\ d\lambda \\
h_2(x,\xi) &= \int \frac{1}{[1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)]^2}\ e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)}\hat{v}(\lambda)\ d\lambda \\
l(x,\xi) &= \int \frac{1}{1+i(x+y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)}\ e^{-iy\xi}\ u(y)\ dy \\
l_2(x,\xi) &= \int \frac{1}{[1+i(x+y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)]^2}\ e^{-iy\xi}\ u(y)\ dy \\
l_3(x,\xi) &= \int \frac{1}{[1+i(x+y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)]^3}\ e^{-iy\xi}\ u(y)\ dy
\end{aligned}$$

Considérons le terme A (1) :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iiiint \frac{1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{g(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= \iiiint g(x,\xi)\ h(x,\xi)\ l(x,\xi)\ dx\ d\xi\ , \\
|I_1| &\leq \|g\|_\infty\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

Pour A (2), on a

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iiiint \frac{-1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{\partial_\xi g(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= -\iiiint \partial_\xi g(x,\xi)\ h(x,\xi)\ l(x,\xi)\ dx\ d\xi\ , \\
|I_2| &\leq \|\partial_\xi g\|_\infty\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\,.
\end{aligned}
$$

A (3)

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \iiiint \frac{1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{g(x,\xi)\ \Delta\partial_\xi^2 a(x,\xi)}{[1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)]^2}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= \Delta \iiiint g(x,\xi)\ \partial_\xi^2 a(x,\xi)\ h(x,\xi)\ l_2(x,\xi)\ dx\ d\xi, \\
|I_3| &\leq \Delta \|g\|_\infty \left\|\partial_\xi^2 a\right\|_\infty\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l_2\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\,.
\end{aligned}
$$

Pour le terme B (1), on a :

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \iiiint \frac{-1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{\partial_x g(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= -\iiiint \partial_x g(x,\xi)\ h(x,\xi)\ l(x,\xi)\ dx\ d\xi, \\
|I_4| &\leq \|\partial_x g\|_\infty\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\,.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
I_{4'} &= \iiiint \frac{1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{g(x,\xi)(i+\Delta\partial_{x\xi}a(x,\xi))}{[1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)]^2}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= \int\int\int\int \partial_\xi g(x,\xi)\ h(x,\xi)\ l_2(x,\xi)\ dx\ d\xi \\
|I_{4'}| &\le \|g\|_\infty (1+\Delta\|\partial_{x\xi}a\|_\infty)\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l_2\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Pour le terme B(2), on a :

$$\begin{aligned}
I_5 &= \iiiint \frac{1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{\partial_{x\xi} g(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= \iiiint \partial_{x\xi} g(x,\xi)\ \times\ h(x,\xi)\ \times\ l(x,\xi)\ dx\ d\xi \\
|I_5| &\le \|\partial_{x\xi} g\|_\infty\ \times\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \times\ \|l\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{5'} &= \iiiint \frac{-1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{\partial_\xi g(x,\xi)(i+\Delta\partial_{x\xi}a(x,\xi))}{[1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)]^2}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= -\iiiint \partial_\xi g(x,\xi)\ h(x,\xi)\ l_2(x,\xi)\ dx\ d\xi \\
|I_7| &\le \|\partial_\xi g\|_\infty (1+\Delta\|\partial_{x\xi}a\|_\infty)\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l_2\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Pour le terme B (3) on a :

$$\begin{aligned}
I_6 &= \iiiint \frac{-1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{\partial_x g(x,\xi)\Delta\partial_\xi^2 a(x,\xi)\ +\ g(x,\xi)\Delta\partial_\xi^2\partial_x a(x,\xi)}{[1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)]^2}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= -\Delta \iiiint \left[\partial_x g(x,\xi)\partial_\xi^2 a(x,\xi)\ +\ g(x,\xi)\partial_\xi^2\partial_x a(x,\xi))\right]\ h(x,\xi\ l(x,\xi)\ dx\ d\xi \\
|I_6| &\le \Delta\ (\|\partial_x g\|_\infty \left\|\partial_\xi^2 a\right\|_\infty\ +\ \|g\|_\infty \left\|\partial_\xi^2\partial_x a\right\|_\infty)\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l_2\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{6'} &= \iiiint \frac{1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{2\ g(x,\xi)\Delta\partial_\xi^2 a(x,\xi)\ (i+\Delta\partial_{x\xi}a(x,\xi))}{[1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)]^3}\ u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= 2\ \Delta \iiiint \left[g(x,\xi)\partial_\xi^2 a(x,\xi)\ (i+\Delta\partial_{x\xi}a(x,\xi))\right]\ h(x,\xi)\ l_3(x,\xi)\ dx\ d\xi \\
|I_{6'}| &\le 2\ \Delta\ \|g\|_\infty \left\|\partial_\xi^2 a\right\|_\infty\ (1+\Delta\|\partial_{x\xi}a\|_\infty)\ \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l_3\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Pour le terme C (1), on a

$$\begin{aligned}
I_7 &= \iiiint \frac{1}{\left[1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)\right]^2} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{g(x,\xi)\Delta\partial_x^2 a(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)} \; u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= \Delta \iiiint g(x,\xi)\ \partial_x^2 a(x,\xi)\ h_2(x,\xi)\ l(x,\xi)\ dx\ d\xi \\
|I_7| &\leq \|g\|_\infty \Delta\ \left\|\partial_x^2 a\right\|_\infty \|h_2\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Pour le terme C (2) on obtient

$$\begin{aligned}
I_8 &= \iiiint \frac{-1}{\left[1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)\right]^2} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{\partial_\xi g(x,\xi)\Delta\partial_x^2 a(x,\xi)}{1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)} \; u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= -\Delta \iiiint \partial_\xi g(x,\xi)\ \partial_x^2 a(x,\xi)\ h_2(x,\xi)\ l(x,\xi)\ dx\ d\xi \\
|I_8| &\leq \Delta \|\partial_\xi g\|_\infty\ \left\|\partial_x^2 a\right\|_\infty \|h_2\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

C (3)

$$\begin{aligned}
I_9 &= \iiiint \frac{1}{\left[1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)\right]^2} e^{i(x|\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} e^{-iy\xi} \\
&\quad \times \frac{g(x,\xi)\Delta\partial_x^2 a(x,\xi)\Delta\partial_\xi^2 a(x,\xi)}{\left[1+i(x-y)+\Delta\partial_\xi a(x,\xi)\right]^2} \; u(y)\ \hat{v}(\lambda) d\lambda dx d\xi dy \\
&= \Delta^2 \iiiint g(x,\xi)\partial_x^2 a(x,\xi)\ \partial_\xi^2 a(x,\xi)\ h_2(x,\xi)\ l_2(x,\xi)\ dx\ d\xi \\
|I_9| &\leq \Delta^2 \|g\|_\infty \left\|\partial_\xi^2 a\right\|_\infty\ \left\|\partial_x^2 a\right\|_\infty\ \|h_2\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\ \|l_2\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Il reste donc à estimer les normes L^2 de h et l,l_2 et l_3 en fonction des normes L^2 de u et v. On va pour cela se ramener à la méthode de la démonstration de Hwang par un changement de variable. Nous procédons à l'estimation de $\|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}$. Celles pour l, l_2 et l_3 étant similaires.

On veut calculer la norme $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ de

$$h(x,\xi) = \int \frac{1}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)}\ e^{i(x,\xi+\lambda)+\Delta a(x,\xi)} \hat{v}(\lambda)\ d\lambda$$

On observe que

$$|h(x,\xi)| = \left| \int \frac{e^{ix\lambda}\hat{v}(\lambda)}{1+i(\xi+\lambda)+\Delta\partial_x a(x,\xi)}\ d\lambda \right|$$

On note $a_i = Im(a) = -ia$ puisque a est imaginaire pur. On réalise le changement de variable $(x,\xi) \to \phi(x,\xi) = (x,\alpha)$:

$$\alpha = \xi - \Delta\partial_x a_i(x,\xi)$$

On vérifie alors que pour Δ assez petit, c'est à dire $|\Delta| < \frac{1}{\|\partial_{x\xi}a\|_\infty}$, ce changement de variable est bien un difféomorphisme. En effet, c'est bien un difféomorphisme local puisque la matrice de sa différentielle est

$$\begin{pmatrix} 1-\Delta\partial_{x\xi}a_i(x,\xi) & \bullet \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant $1-\Delta\partial_{x\xi}a_i(x,\xi)$ non nul si Δ assez petit : $|\Delta| < \frac{1}{\|\partial_{x\xi}a\|_\infty}$. D'autre part, on vérifie que c'est une bijection : x reste constant donc il suffit de vérifier que à x fixé $\alpha(x,\xi)$ est bijective en ξ. C'est donc vrai puisque c'est une fonction réelle C^∞ à dérivée qui ne s'annule pas donc injective. C'est une surjection puisque on a $\alpha' = 1-\Delta\partial_{x\xi}a_i(x,\xi) > 1-\Delta\|\partial_{x\xi}a\|_\infty > Constante$ par hypothèse. Le changement de variable est donc licite et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} &= \int_x\int_\xi |h(x,\xi)|^2\,dxd\xi \\
&= \int_x\int_\alpha \frac{\left|h(x,\alpha+\Delta\partial_x a_i(\phi^{-1}(x,\alpha)\right|^2}{|1-\Delta\partial_{x\xi}a_i(\phi^{-1}(x,\alpha))|}dxd\alpha \\
&= \int_x\int_\alpha \frac{1}{|1-\Delta\partial_{x\xi}a_i(x,\phi^{-1}(\alpha))|}\left|\int_\lambda \frac{e^{ix\lambda}\hat{v}(\lambda)}{1+i(\alpha+\lambda)}d\lambda\right|^2 dxd\xi
\end{aligned}$$

Or on peut majorer $\frac{1}{|1-\Delta\partial_{x\xi}a(x,\phi^{-1}(\alpha))|}$ par $\frac{1}{1-\Delta\|a\|}$. On obtient alors la majoration :

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} \leq \frac{1}{1-\Delta\|a\|}\|h_H\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}$$

où $h_H(x,\alpha) = \int \frac{e^{ix\lambda}\hat{v}(\alpha)}{1+i(\alpha+\lambda)}d\lambda$.
Or, la norme L^2 de la fonction h_H est estimée dans [6], en remarquant qu'il s'agit d'un produit de convolution à
alpha fixé. On obtient ainsi une majoration $\|h_H\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} \leq C\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}$ où C est un constante.
On obtient le même type de résultat avec des constantes différentes pour l, l_2...
Pour I_1, on a alors le résultat :

$$|I_1| \leq C\|g\|_\infty \frac{1}{1-\Delta\|a\|}\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

On obtient le même type de résultats pour les autres termes I_2 à I_9 sauf qu'il apparaît pour certains des coefficients Δ et des normes sur g et sur a. Si on garde la condition $\Delta\|a\| \leq 1$, il ne reste donc que des constantes et des normes en g. De sorte que l'on peut écrire :

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} g(x,D)u(x)v(x)\right\| dx \leq C\|g\|\frac{1}{1-\Delta\|a\|}\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, u,v\in C_0^\infty$$

Par densité, on obtient pour $u^2(\mathbb{R})$ que $g(x,D)u(x)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ avec sa norme majorée par $C\|g\|\frac{1}{1-\Delta\|a\|}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$. De sorte que l'opérateur $g(x,D)$ peut être étendu de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ avec une norme d'opérateur majorée par $C\|g\|\frac{1}{1-\Delta\|a\|}$ avec C constante unverselle. D'autre part, si Δ est assez petit, on peut majorer cette expression par $C'\|g\|(1+\Delta\|a\|)$.

5 Conclusions

Durant cette recherche, on s'est limité à la dimension 1. Une étude en dimension supérieur nécessite une écriture laborieuse. Je pense cependant que l'on peut obtenir le même résultat pour toutes les dimensions, en contrôlant à l'aide de dérivées d'ordres supérieurs. Par contre, étendre le résultat à des $\rho > 0$ ne semble pas immédiat. Une extension importante consisterait à autoriser a à être non imaginaire pur. Ici, la méthode de changement de variable nécessite a imaginaire pur.

Références

[1] ALINHAC Serge - GERARD Patrick Opérateurs Pseudo-différentiels et théorème de Nash Moser. Editions de CNRS, 1991

[2] HORMANDER, Lars The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Springer Verlag, 1985.

[3] GRIGIS,Alain ; SJOSTRAND Johannes Microlocal Analysis for Différential Operators, Cambridge University Press, 2000

[4] ST RAYMOND Xavier Elementary Introduction to the theory of Pseudo-differential Operators CRC Press, Boca Raton, 1991

[5] A. P. Calderón and R. Vaillancourt. A class of bounded pseudo-differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 69 : 1185-1187, 1972

[6] HWANG The L^2-boundedness of pseudodifferential operators. Trans Amer. Math. Soc., Volume 302, Number 1, July 1987

6 Remerciements

Je tenais bien sûr à remercier Jérôme Le Rousseau pour tout le temps qu'il m'a accordé au cours de ce stage. Il m'a laissé une liberté suffisamment grande pour pouvoir m'attarder sur les parties qui m'interessaient tout en étant toujours extrèmement disponible pour toutes les questions que je pouvais me poser. Ceci a contribué à ce que j'ai beaucoup apprécié ce stage : dans les moments où il s'agissait d'apprendre une nouvelle théorie, et encore plus lorsqu'il s'est agit de réfléchir sur des choses plus nouvelles. D'autre part, c'est une personne très sympathique et ouverte, ce qui a bien sûr contribué à ce que ce stage se passe très agréablement.
Je tiens à remercier toute l'équipe du LATP qui m'a accueilli si chaleureusement. En particulier, je les remercie pour tous ce qu'ils ont fait pour m'aider à résoudre les problèmes administratifs que j'ai eu au début du stage, et pour m'avoir aidé à trouver un logement. Je les remercie bien sûr aussi pour m'avoir invité au séminaire d'EDP sur l'île de Porquerolles, qui a été pour moi très intéressant en ce qu'il m'a montré la variété des sujets abordés en EDP, et bien sûr très agréable.