

# Mémoire de stage de M2 : Contrôle pour l'équation de Schrödinger non linéaire

Camille LAURENT sous la direction de Patrick GERARD

6 octobre 2008

## Table des matières

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Théorèmes d'existence</b>                                       | <b>6</b>  |
| 2.1      | Existence globale $H^1(M)$ . . . . .                               | 6         |
| 2.2      | Détermination de l'équation duale . . . . .                        | 9         |
| 2.3      | Existence globale $H^{-1}(M)$ . . . . .                            | 10        |
| <b>3</b> | <b>Théorèmes de propagation</b>                                    | <b>15</b> |
| 3.1      | Propagation de la convergence . . . . .                            | 15        |
| 3.2      | Propagation de la régularité de $H^{-1}(M)$ à $H^1(M)$ . . . . .   | 17        |
| <b>4</b> | <b>Contrôle linéaire</b>                                           | <b>19</b> |
| 4.1      | Inégalité d'observabilité dans $H^{-1}(M)$ . . . . .               | 19        |
| 4.2      | Contrôle linéaire dans $H^1(M)$ . . . . .                          | 20        |
| <b>5</b> | <b>Contrôle non-linéaire près d'une trajectoire</b>                | <b>22</b> |
| <b>6</b> | <b>Contrôle non-linéaire vers 0</b>                                | <b>28</b> |
| <b>7</b> | <b>Théorèmes de prolongement unique et inégalités de Carleman</b>  | <b>30</b> |
| 7.1      | Cas du tore en dimension 2 . . . . .                               | 30        |
| 7.2      | Cas de la sphère $S^2$ . . . . .                                   | 37        |
| 7.3      | Résultats connus dans le cas de termes de potentiels peu réguliers | 41        |
| <b>8</b> | <b>Divers</b>                                                      | <b>42</b> |
| 8.1      | Adaptation du lemme du piège . . . . .                             | 42        |
| 8.2      | Un lemme de Lions-Aubin . . . . .                                  | 43        |
| 8.3      | Quelques réflexions sur le propagateur . . . . .                   | 44        |
| 8.4      | Lemme classique de propagation . . . . .                           | 47        |



# 1 Introduction

Le but de ce rapport est l'étude de la contrôlabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) sur une surface compacte. Plus précisément, on s'intéresse au système

$$\begin{cases} i\partial_t w + \Delta w - P'(|w|^2)w &= 0 \text{ sur } ]0, +\infty[ \times M \\ w(0) &= w_0 \in H^1(M) \end{cases} \quad (1)$$

Ici,  $M$  est une variété riemannienne compacte de dimension 2, sans bord,  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $M$  et  $P$  est une fonction polynôme à coefficients réels, vérifiant  $P(0) = 0$  et l'hypothèse défocalisante

$$P'(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$$

Le travail de N.Burq, P.Gérard et N.Tzvetkov [1] a montré que pour toute donnée initiale  $w_0 \in H^1(M)$ , le système (1) admet une unique solution  $u(t, x)$  dans l'espace  $C([0, +\infty[, H^1(M))$ . Cela se base sur des inégalités de type Strichartz avec perte de dérivées

$$\|e^{it\Delta} w_0\|_{L^p([0, T], L^q(M))} \leq C \|w_0\|_{H^{1/p}(M)}$$

où  $(p, q)$  est un couple admissible, c'est à dire

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} \text{ avec } p \geq 2, \quad q < +\infty$$

On les prouve par des estimations semi-classiques sur des solutions approchées construites par la méthode BKW.

Le problème du contrôle consiste à rajouter un terme  $g$  à l'équation 1. Ce qui correspond physiquement à une action extérieure d'un opérateur sur le système, à l'ajout d'une "force". On se demande donc si ce terme permet de déterminer exactement la position du système en un temps  $T$ , c'est à dire d'imposer  $u(T, \cdot) = v_0$  où  $v_0$  est déterminée à l'avance. L'enjeu est alors de trouver quelles conditions sur le support en espace  $\omega \subset M$  de  $g$  et sur le temps  $T$  permettent d'avoir un tel contrôle.

Le premier résultat positif pour NLS sur une surface compacte a été donné par B. Dehman, P. Gérard, et G. Lebeau [2]. Il y apparaît alors deux conditions sur l'ouvert de contrôle  $\omega$ . (notées (A) et (B) par la suite).

La première, dite condition de contrôle géométrique :

**(A)** Il existe  $T_0 > 0$  tel que toute géodésique de  $M$ , se déplaçant à la vitesse 1 et démarrant au temps  $t = 0$  passe dans  $\omega$  en un temps  $t < T_0$

La deuxième condition sera une condition de prolongement unique dans  $H^1(M)$  :

**(B)** Pour tout  $T > 0$ , la seule solution dans  $C([0, T[, H^1(M))$  du système

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f_1 u + f_2 \bar{u} &= 0 \\ u &= 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \omega \end{cases} \quad (2)$$

avec  $f_1(t, x)$  et  $f_2(t, x) \in L^2(]0, T[, L^\infty) \cap L^2(]0, T[, H^1)$  est la solution  $u \equiv 0$ .

On se propose dans ce rapport de donner une preuve alternative de celle de [2].

Dans cet article, la stratégie globale consiste à prouver d'abord un théorème de stabilisation pour Schrödinger non linéaire. Plus précisément, on prouve que si  $a$  est une fonction réelle ne s'annulant pas sur un ouvert  $\omega$  qui vérifie les conditions (A) et (B) alors, pour tout  $R_0 > 0$ , il existe  $C > 0$  et  $\gamma > 0$  tels que la solution du système

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u - P'(|u|^2)u &= 0 \quad \text{sur } ]0, T[ \times M \\ u(x, 0) &= u_0(x) \in H^1(M) \end{cases}$$

vérifie

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq Ce^{-\gamma t} \|u_0\|_{H^1} \quad t > 0$$

pour tout  $u_0$  vérifiant  $\|u_0\|_{H^1} \leq R_0$ . Ce type de contrôle donne donc une décroissance exponentielle qui permet de s'approcher de façon arbitrairement proche de 0.

Ensuite, on prouve que si on est suffisamment proche de 0, on peut linéariser le problème et utiliser des résultats de contrôle linéaire. Ce qui donne finalement le théorème suivant

**Théorème 1** *Supposons que  $\omega$  vérifie les hypothèses (A) et (B). Alors, pour tout  $R_0 > 0$ , il existe un  $T > 0$  tel que pour tout  $u_0$  et  $v_0 \in H^1(M)$  vérifiant*

$$\|u_0\|_{H^1(M)} \leq R_0 \text{ et } \|v_0\|_{H^1(M)} \leq R_0$$

*on ait un contrôle  $g \in L^1([0, T], H^1(M))$  à support dans  $[0, T] \times \omega$  tel que l'unique solution du système*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - P'(|u|^2)u &= \tilde{g} \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases}$$

*où  $\tilde{g} = g$  si  $0 \leq t \leq T$  et 0 si  $t > T$ , satisfasse  $u(T, \cdot) = v_0$ .*

Par réversibilité du temps, cela équivaut à la contrôlabilité vers 0.

La stratégie alternative que l'on se propose de développer consiste à linéariser le problème même lorsque  $w_0$  est grand. Seulement, contrairement au cas où on est proche de 0, la linéarisation ne peut se faire autour d'une constante, mais il apparaît alors de façon naturelle que ce contrôle peut se faire si on reste proche d'une trajectoire de Schrödinger non linéaire sans terme source. On prouve un théorème de contrôle près d'une trajectoire :

**Théorème 2** *Supposons  $w$  solution de (1).*

*Sous les hypothèses (A) et (B), il existe  $\varepsilon(T, \omega, \|w_0\|_{H^1(M)})$  tel que pour tout*

$u_0 \in H^1(M)$  tel que  $\|u_0 - w_0\|_{H^1} < \varepsilon$ , alors il existe  $g \in L^1([0, T], H^1(M))$  à support dans  $[0, T] \times \omega$  tel que l'unique solution  $u$  dans  $C([0, T], H^1(M))$  de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - P'(|u|^2)u &= g \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

vérifie  $u(T) = w(T)$ .

De plus, on peut choisir  $g$  tel que l'on ait une estimation

$$\|g\|_{L^1([0, T], H^1(M))} \leq C(T, \omega, \|w_0\|_{H^1(M)})$$

Ensuite, en faisant des contrôles successifs près des trajectoires de NLS, en choisissant le point d'arrivée de sorte que l'énergie diminue, on prouve la contrôlabilité vers 0 et donc le théorème 1.

La preuve de la contrôlabilité près d'une trajectoire utilise un argument de point fixe basée sur le contrôle du système linéarisé.

On est donc amené à prouver un théorème de contrôle pour le système

$$i\partial_t u + \Delta u + f_1 u + f_2 \bar{u} = 0$$

où  $f_1(t, x)$  et  $f_2(t, x) \in L^2([0, T], L^\infty) \cap L^2([0, T], H^1)$ .

La démarche de la preuve reste alors proche de celle de [2] où la contrôlabilité est prouvée dans le cas de l'équation de Schrödinger libre. Par un argument de dualité, la contrôlabilité dans  $H^1$  est ramenée à une inégalité d'observabilité pour l'équation duale dans  $H^{-1}$ .

Pour prouver cette dernière, un raisonnement par l'absurde nous amène à prouver la convergence vers 0 dans  $L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$  de suites  $(u_n)$  faiblement convergentes satisfaisant à

$$\begin{cases} i\partial_t u_n + \Delta u_n + f_n u_n + g_n \bar{u}_n &= 0 \\ u_n &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2([0, T], H^1(\omega)) \end{cases} \quad (4)$$

On doit donc prouver une propagation de la "convergence forte", ce que l'on fait dans la section 3.1 à l'aide de mesures de défaut microlocal dont on prouve qu'elles propagent l'information le long des géodésiques.

Ensuite, on a besoin d'un argument d'unicité dans  $H^{-1}$ . Or, la propriété (B) n'est valable que dans  $H^1$ , ce qui nous incite à prouver dans la section 3.2 la propagation de la régularité pour l'équation linéarisée et pour un  $\omega$  satisfaisant à la propriété (A).

Cependant, la principale difficulté dans l'adaptation de ce schéma de preuve résidait dans la faible régularité des  $f_i$ , ce qui obligeait à faire des estimations fines sur les produits de fonctions  $H^s$ .

La propriété (B), telle quelle, n'est a priori pas très explicite. Pour avoir des exemples d'ouverts vérifiant cette propriété, on se réfère à l'article de Koch et

Tataru [6] qui donne des conditions de prolongement unique pour ce type de potentiels. En fait, ces conditions sont valables pour des potentiels beaucoup moins réguliers :  $L^2([0, T], L^2(M))$ . Dans le cas de potentiels réguliers, ces conditions se basent sur des inégalités de Carleman dont on discute dans la section 7. Dans le cas de potentiels peu réguliers, on a besoin d'inégalités de dispersion qui sont détaillées dans [6].

On peut ainsi donner deux exemples de couples  $(M, \omega)$  satisfaisant à (A) et (B).

i)  $M = S^2$  et  $\omega$  est un voisinage de l'équateur.

ii)  $M = \mathbb{T}^2$ , le tore de dimension 2 et  $\omega$  un voisinage de l'union du cercle générateur et du grand cercle extérieur.

Cependant, par exemple pour l'exemple du tore, on sait grâce à Jaffard [4] et à Burq-Zworski [3] de façon plus générale, que n'importe quel ouvert non vide implique la contrôlabilité de l'équation de Schrödinger libre. On est donc naturellement amené à se demander si on ne pourrait pas diminuer l'ouvert dans ce cas.

Notations :

Dans toute la suite, on aura souvent à appliquer des inégalités de Strichartz, ce qui incite à se placer dans l'espace  $Y_T = C([0, T], H^1(M)) \cap L^p([0, T], W^{\sigma, q}(M))$  où  $(p, q)$  est un couple admissible et  $\sigma = 1 - \frac{1}{p}$ , ce qui implique  $W^{\sigma, q}(M) \subset L^\infty(M)$ . Dans la section 2 d'existence linéaire, on ne supposera que  $p > 2$ . En revanche, dans la section 5, on écrira des majorations qui seront valables si  $p$  est supérieur à un certain  $p_0$  ne dépendant que du degré du polynôme  $P$ . On se contentera alors d'écrire que l'inégalité est valable "pour  $p$  grand".

## 2 Théorèmes d'existence

### 2.1 Existence globale $H^1(M)$

**Théorème 3** Soit  $f_1(t, x), f_2(t, x) \in L^2([0, T], H^1(M)) \cap L^2([0, T], L^\infty(M))$  et  $g \in L^1([0, T], H^1(M))$ .

Soit  $A$  tel que

$$\|f_i\|_{L^2(H^1(M))} + \|f_i\|_{L^2(L^\infty(M))} \leq A \quad i \in \{1, 2\}$$

Soit  $p > 2$ . Soit  $u_0 \in H^1(M)$ . Alors, il existe une unique solution  $u$  dans  $C([0, T], H^1(M)) \cap L^p([0, T], L^\infty(M))$  du système :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f_1 u + f_2 \bar{u} &= g \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases} \quad (5)$$

De plus, il existe  $C = C(T, A)$  tel que  $\|u\|_{Y_T} \leq C(T, A)(\|u_0\|_{H^1(M)} + \|g\|_{L^1([0, T], H^1(M))})$ .

**Démonstration :** On se place dans l'espace complet  $Y_T$ .  
On résout  $\Phi(u) = u$  avec  $\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 + i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(f_1 u(\tau))d\tau + i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(f_2 \bar{u}(\tau))d\tau - i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}g(\tau)d\tau$   
Montrons que  $\Phi$  applique  $Y_T$  dans  $Y_T$ .

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty(H^1(M))} \leq C\|u_0\|_{H^1(M)}$$

car le flot de Schrödinger est unitaire. De plus,

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p([0,T],W^{\sigma,q}(M))} &\leq \|(1+\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}e^{it\Delta}u_0\|_{L^p(L^q)} \\ &\leq C\|(1+\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u_0\|_{H^{\frac{1}{p}}} \text{ par l'inégalité de Strichartz de [2]} \\ &\leq C\|u_0\|_{H^{\frac{1}{p}+\sigma}} = \|u_0\|_{H^1(M)} \end{aligned}$$

On a donc,  $\|e^{it\Delta}u_0\|_{Y_T} \leq C\|u_0\|_{H^1(M)}$

$$\left\| i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(f_1 u(\tau))d\tau \right\|_{H^1(M)} \leq \int_0^t \|f_1 u\|_{H^1(M)}d\tau$$

De même

$$\begin{aligned} \left\| i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(f_2 \bar{u}(\tau))d\tau \right\|_{L^p([0,T],W^{\sigma,q}(M))} &\leq \int_0^t \|(1+\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}(f_2 \bar{u})\|_{H^{\frac{1}{p}}} \\ &\quad \text{par le corollaire 10 de [2] (inégalité de Strichartz)} \\ &\leq \int_0^t \|f_2 \bar{u}\|_{H^1(M)}d\tau \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \left\| i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(f_1 u(\tau))d\tau \right\|_{Y_T} \leq \int_0^t \|f_1 u\|_{H^1(M)}d\tau$$

De la même manière, en remplaçant  $f_1 u$  par  $f_2 \bar{u}$  et  $g$ , on obtient  $\left\| i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(f_2 \bar{u}(\tau))d\tau \right\|_{Y_T} \leq \int_0^t \|f_2 \bar{u}\|_{H^1(M)}d\tau$  et  $\left\| i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(g(\tau))d\tau \right\|_{Y_T} \leq \int_0^t \|g\|_{H^1(M)}d\tau$ . Ce dernier est borné par hypothèse.

Il reste donc seulement à borner  $\int_0^t \|f_1 u\|_{H^1(M)}d\tau$  et  $\int_0^t \|f_2 \bar{u}\|_{H^1(M)}d\tau$ .  
Or  $\|f u\|_{H^1(M)} \leq C(\|f\|_{H^1(M)} \|u\|_{L^\infty(M)} + \|u\|_{H^1(M)} \|f\|_{L^\infty(M)})$ . Pour simplifier, on ne le fera que pour  $f_1$  et on écrira  $f$  au lieu de  $f_1$ .

$$\begin{aligned} \int_0^t \|f u\|_{H^1(M)}d\tau &\leq C \int_0^t \|f\|_{H^1(M)} \|u\|_{L^\infty(M)}d\tau + \int_0^t \|u\|_{H^1(M)} \|f\|_{L^\infty(M)}d\tau \\ &\leq C\|f\|_{L^{\bar{p}}([0,t],H^1(M))} \|u\|_{L^p(L^\infty(M))} + \|f\|_{L^1(L^\infty(M))} \|u\|_{L^\infty(H^1(M))} \\ &\leq C(\|f\|_{L^{\bar{p}}([0,t],H^1(M))} + \|f\|_{L^1(L^\infty(M))}) \|u\|_{Y_T} \\ &\leq C(t^\gamma \|f\|_{L^2([0,t],H^1(M))} + t^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(L^\infty(M))}) \|u\|_{Y_T} \text{ Hölder en temps} \\ &\leq C(t^\gamma A + t^{\frac{1}{2}} A) \|u\|_{Y_T} \end{aligned}$$

Avec  $\frac{1}{2} + \gamma = \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p}$ , soit  $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} > 0$  si  $p > 2$ . Donc  $\Phi$  applique bien  $Y_T$  dans lui même. Montrons qu'elle est contractante pour  $t$  assez petit. Soit  $u, v$  dans  $Y_T$ .

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{Y_t} &= \left\| i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} (f_1(u-v)(\tau)) d\tau \right\|_{Y_t} + \left\| i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} (f_2(\overline{u-v})(\tau)) d\tau \right\|_{Y_t} \\ &\leq C(t^\gamma \|f_1\|_{L^2([0,t], H^1(M))} + t^{\frac{1}{2}} \|f_1\|_{L^2(L^\infty(M))}) \|u-v\|_{Y_T} \\ &\quad + C(t^\gamma \|f_2\|_{L^2([0,t], H^1(M))} + t^{\frac{1}{2}} \|f_2\|_{L^2(L^\infty(M))}) \|u-v\|_{Y_T} \\ &\leq C(t^\gamma A + t^{\frac{1}{2}} A) \|u-v\|_{Y_T} \end{aligned}$$

par le calcul précédent appliqué à  $u-v$ . Donc,  $\Phi$  est une contraction si  $C(t^\gamma A + t^{\frac{1}{2}} A) < 1/2 < 1$ , c'est à dire par exemple si

$$t < \min \left( \left( \frac{1}{4CA} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \left( \frac{1}{4CA} \right)^2 \right) = \tilde{C}(A) = \tilde{C}$$

On a donc une solution unique sur chaque petit intervalle de longueur  $\tilde{C}$ . Par compacité, on peut alors recouvrir  $[0, T]$  avec  $N$  tels petits intervalles, où  $N$  est de l'ordre de  $\frac{T}{\tilde{C}} \approx T(A^{\frac{1}{\gamma}} + A^2)$ . On peut alors trouver une solution sur chaque intervalle et les recoller ensuite. On utilise ici fortement le fait que  $\tilde{C}$  ne dépend pas de  $u$ , c'est à dire que l'on a un comportement linéaire en  $u$ .

#### Continuité de l'application $u_0 \mapsto u$ de $H^1(M)$ dans $Y_T$ .

L'application est en fait affine. On prouve d'abord la continuité sur un petit intervalle où  $\Phi$  est contractante. Les calculs précédents prouvent alors qu'il existe  $K = 1/2 < 1$  tel que sur l'intervalle  $[0, \frac{T}{N}]$ , et pour  $u$  et  $v$  solutions avec données initiales  $u_0$  et  $v_0$

$$\|u-v\|_{Y_{\frac{T}{N}}} \leq C\|u_0-v_0\|_{H^1(M)} + K\|u-v\|_{Y_{\frac{T}{N}}}$$

Donc  $\|u-v\|_{Y_{\frac{T}{N}}} \leq \left( \frac{C}{1-K} \right) \|u_0-v_0\|_{H^1(M)}$  Puis, par récurrence, sachant que  $\|u_{T\frac{k+1}{N}}\|_{H^1(M)} \leq \|u\|_{Y_{[T\frac{k}{N}, T\frac{k+1}{N}]}}$

$$\begin{aligned} \|u-v\|_{Y_{[k\frac{T}{N}, (k+1)\frac{T}{N}]}} &\leq \left( \frac{C}{1-K} \right) \|u_{k\frac{T}{N}} - v_{k\frac{T}{N}}\|_{H^1(M)} \\ &\leq \left( \frac{C}{1-K} \right)^k \|u_0-v_0\|_{H^1(M)} \end{aligned}$$

Donc, en sommant,  $\|u-v\|_{Y_T} \leq C(T, A)\|u_0-v_0\|_{H^1(M)}$

**Remarque 1** On a obtenu, sur chaque petit intervalle, la majoration

$$\|u\|_{Y_{\frac{T}{N}}} \leq \left( \frac{C}{1-K} \right) \|u_0\|_{H^1(M)} + \int_0^{\frac{T}{N}} \|g\|_{H^1(M)}$$



Et en faisant une récurrence, on obtient que

$$\|u\|_{Y_T} \leq C(T, A)\|u_0\|_{H^1(M)} + C(T, A) \int_0^T \|g\|_{H^1(M)}$$

**Remarque 2** Le point  $t = 0$  n'a pas de propriété particulière, et on peut prouver l'existence avec condition initiale en  $t_0 \in [0, T]$ . De plus, on voit facilement qu'on peut trouver des constantes ne dépendant que de  $A$  (pas de  $t_0$ ) telles que l'on ait le même types de majorations avec  $u_0$  remplacé par  $u(t_0)$ .

## 2.2 Détermination de l'équation duale

On veut faire des raisonnements par dualité. Or, l'équation que l'on considère n'est pas  $\mathbb{C}$ -linéaire, mais elle est en revanche  $\mathbb{R}$ -linéaire. Il va donc falloir changer de dualité. On considère un nombre complexe comme un élément de  $\mathbb{R}^2$ ,  $x = x_1 + ix_2$  le produit scalaire est alors le produit scalaire habituel sur  $\mathbb{R}^2$   $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \Re(x\bar{y})$ . Pour des fonctions à but dans  $\mathbb{C}$ , la dualité  $L^2$  devient  $\langle f, g \rangle = \int_M f_1 g_1 + \int_M f_2 g_2 = \int_M \Re(f\bar{g})$

Déterminons l'équation duale de  $i\partial_t u + \Delta u + f u + g \bar{u} = 0$ . On note

$$\begin{aligned} f &= f_1 + if_2 \\ g &= g_1 + ig_2 \\ u &= u_1 + iu_2 \end{aligned}$$

Donc  $iu = -u_2 + iu_1$ ,  $fu = (f_1 u_1 - f_2 u_2) + i(f_1 u_2 + f_2 u_1)$ ,  $g\bar{u} = (g_1 u_1 + g_2 u_2) + i(-g_1 u_2 + g_2 u_1)$ .

Notons  $v$  le vecteur  $(-u_2, u_1)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  correspondant à  $iu$ . L'équation s'écrit donc dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 u_1 - f_2 u_2 \\ f_1 u_2 + f_2 u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 u_1 + g_2 u_2 \\ -g_1 u_2 + g_2 u_1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 v_2 + f_2 v_1 \\ -f_1 v_1 + f_2 v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 v_2 - g_2 v_1 \\ g_1 v_1 + g_2 v_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2 - g_2 & f_1 + g_1 \\ -f_1 + g_1 & f_2 + g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

On est donc en présence d'une équation d'évolution dans  $\mathbb{R}^2$  :  $\partial_t v + (A+B)v = 0$ .

L'équation duale pour la dualité canonique dans  $\mathbb{R}^2$  sera  $\partial_t \phi + C\phi = 0$  telle que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle v, \phi \rangle &= 0 \\ \langle \partial_t v, \phi \rangle + \langle v, \partial_t \phi \rangle &= 0 \\ \langle -(A+B)v, \phi \rangle + \langle v, -C\phi \rangle &= 0 \\ \langle (A+B) + {}^t C v, \phi \rangle &= 0\end{aligned}$$

Donc,  $C = -{}^t(A+B)$ . Or,  ${}^t A = -A$  (cela traduit le fait que la "vraie" équation de Schrödinger est autoadjointe). Donc,

$$C = A + \begin{pmatrix} g_2 - f_2 & f_1 - g_1 \\ -f_1 - g_1 & -f_2 - g_2 \end{pmatrix}$$

Ce qui correspond, si on repasse en complexe, à l'équation

$$i\partial_t u + \Delta u + \tilde{f}u + \tilde{g}\bar{u} = 0$$

Avec

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1 &= f_1 \\ \tilde{f}_2 &= -f_2 \\ \tilde{g}_1 &= -g_1 \\ \tilde{g}_2 &= -g_2\end{aligned}$$

C'est à dire  $\tilde{f} = \bar{f}$  et  $\tilde{g} = -g$ .

D'autre part, on va vérifier que si  $v$ , dans un espace de distributions où la multiplication est bien définie, vérifie  $\int_0^T \langle \partial_t \phi + C\phi, v \rangle = 0$  pour toute  $\phi \in C_0^\infty([0, T[, M)$ , alors  $v$  vérifie  $\partial_t v + (A+B)v = 0$  au sens des distributions. En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \partial_t v + (A+B)v, \phi \rangle &= \int_0^T \langle \partial_t v, \phi \rangle + \int_0^T \langle v, {}^t(A+B)\phi \rangle \\ \text{IPP en t} &= - \int_0^T \langle v, \partial_t \phi \rangle - \int_0^T \langle v, C\phi \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Or, si on repasse en complexe, cela signifie qu'une fonction  $v$  vérifiant  $\Re \int_T \int_M [\partial_t \phi - i\Delta \phi - if\phi - ig\bar{\phi}]\bar{v} = 0$  pour toute  $\phi \in C_0^\infty([0, T[, M)$  vérifie au sens des distributions l'équation  $\partial_t v - i\Delta v - i\bar{f}v + ig\bar{v} = 0$ , soit  $i\partial_t v + \Delta v + \tilde{f}v - g\bar{v} = 0$

### 2.3 Existence globale $H^{-1}(M)$

Avant de parler d'existence dans  $H^{-1}(M)$ , on s'assure que les termes dont on parle ont bien un sens dans des espaces de distribution, grâce à la remarque suivante :

**Remarque 3** Si  $u \in H^{-1}(M)$ , et  $f \in H^1$ ,  $fu$  est bien défini puisqu'il définit une distribution dans  $H^{-s}$  pour tout  $s > 1$ .

En effet, si  $\varphi \in C^\infty(M)$  (que l'on pense dans  $H^s$ ) :

$$\begin{aligned} \langle fu, \varphi \rangle &= \langle u, \varphi f \rangle \\ &\leq \|u\|_{H^{-1}} \|\varphi f\|_{H^1} \\ &\leq \|u\|_{H^{-1}} \|f\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^s} \end{aligned}$$

Car, si  $s > 1$

$$\begin{aligned} \|\varphi f\|_{H^1} &= \|\varphi f\|_{L^2} + \|\nabla \varphi f\|_{L^2} + \|\varphi \nabla f\|_{L^2} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} + \|\nabla \varphi\|_{L^q} \|f\|_{L^p} + \|\varphi\|_{L^\infty} \|\nabla f\|_{L^2} \\ &\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \quad 2 < q < \infty \text{ assez petit tel que } H^{s-1} \subset L^q \\ &\leq \|\varphi\|_{H^s} \|f\|_{H^1} + \|\nabla \varphi\|_{H^{s-1}} \|f\|_{L^p} + \|\varphi\|_{H^s} \|f\|_{H^1} \\ &\leq \|\varphi\|_{H^s} \|f\|_{H^1} \end{aligned}$$

Pour établir l'existence dans  $H^{-1}(M)$ , on va faire un raisonnement par dualité : si  $v$  est solution de  $i\partial v + Av = 0$  et  $\phi$  solution de l'équation duale  $i\partial \phi + C\phi = 0$ , on a  $\langle v(t), \phi(t) \rangle = \text{constante} = \langle v_0, \phi_0 \rangle$ . Cette formule va permettre de définir une solution par dualité.

**Théorème 4** Soit  $f, g \in L^2([0, T], H^1(M)) \cap L^2([0, T], L^\infty(M))$ .

Soit  $A$  tel que

$$\|f\|_{L^2(H^1(M))} + \|f\|_{L^2(L^\infty(M))} \leq A \text{ et } g \text{ vérifie la même inégalité}$$

Soit  $u_0 \in H^{-1}(M)$ . Alors, il existe une unique solution faible  $u$  dans  $C_w([0, T], H^{-1}(M))$  de  $i\partial_t u + \Delta u + f u - g \bar{u} = 0$  avec condition initiale  $u(0) = u_0$ . De plus, pour tout  $\phi \in C^\infty([0, T], C^\infty(M))$ , on a

$$\Re \int_0^T \int_M [\partial_t \phi - i\Delta \phi - if\phi - ig\bar{\phi}] \bar{u} = \Re \int_M \phi_T \bar{u}_T - \int_M \phi_0 \bar{u}_0$$

De plus, il existe  $C(A)$  tel que  $\|u\|_{L^\infty([0, T], H^{-1}(M))} \leq C\|u_0\|_{H^{-1}(M)}$

**Dem** : Soit  $\phi \in C^\infty(M)$  une fonction test. Soit  $t \in [0, T]$ . On va définir  $u(t) \in \mathcal{D}'(M)$  par son action sur  $\phi$ . On définit, grâce au théorème d'existence 3, une fonction  $\Psi_t(s) \in C([0, T], H^1(M))$  telle que

$$\begin{cases} i\partial_s \Psi_t(s) + \Delta \Psi_t(s) + f(s, x) \Psi_t(s) + g(s, x) \overline{\Psi_t(s)} &= 0 \\ \Psi_t(t) &= \phi \end{cases} \quad (6)$$

Avec  $\|\Psi_t\|_{Y_T} \leq C(f, g, T) \|\phi\|_{H^1(M)}$ .

En notant  $\langle, \rangle$  la dualité réelle :  $\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}} = \int_M f_1 g_1 + f_2 g_2 = \int_M \Re(f \bar{g})$ .

On définit  $u(t)$  dans  $H^{-1}(M)$  à but  $\mathbb{R}^2$  identifié à  $\mathbb{C}$  par la dualité réelle

$$\langle u(t), \phi \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}} = \langle u_0, \Psi_t(0) \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}}$$

Cela définit bien  $u(t) \in H^{-1}(M)$  car le terme de droite définit bien une forme  $\mathbb{R}$ -linéaire sur les fonctions de  $H^1(M)$  à but  $\mathbb{R}^2$  identifié à  $\mathbb{C}$ . Ceci est vrai car l'équation est  $\mathbb{R}$ -linéaire et on a l'inégalité :

$$\begin{aligned} \left| \langle u(t), \phi \rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \right| &= \left| \langle u_0, \Psi_t(0) \rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \right| \\ &\leq \|u_0\|_{H^{-1}(M)} \|\Psi_t(0)\|_{H^1(M)} \\ &\leq \|u_0\|_{H^{-1}(M)} \|\Psi_t\|_{Y_T} \\ &\leq C(f_1, f_2, T) \|u_0\|_{H^{-1}(M)} \|\phi\|_{H^1(M)} \end{aligned}$$

Et donc  $\|u(t)\|_{H^{-1}(M)} \leq C(f_1, f_2, T) \|u_0\|_{H^{-1}(M)}$ .

**Lemme 1**  *$u$  définit bien une fonction de  $C_w([0, T], H^{-1}(M))$ .*

**Dem :** Soit  $\phi \in H^1(M)$  et  $\Psi_t$  les fonctions correspondantes. Soit  $t \in [0, T]$  et  $t_n \rightarrow t$ . On doit prouver  $\langle u_0, \Psi_{t_n}(0) \rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \rightarrow \langle u_0, \Psi_t(0) \rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}}$ , que l'on aura en particulier si  $\Psi_{t_n}(0) \xrightarrow{H^1(M)} \Psi_t(0)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par linéarité,  $\Psi_t - \Psi_{t_n}$  est solution de l'équation 6, avec condition initiale en  $t_n$  :  $\Psi_t(t_n) - \Psi_{t_n}(t_n)$ . Par le théorème d'existence  $H^1(M)$  et la remarque 2, il existe  $C = C(A)$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \|\Psi_t(0) - \Psi_{t_n}(0)\|_{H^1(M)} &\leq C \|\Psi_t(t_n) - \Psi_{t_n}(t_n)\|_{H^1(M)} \\ &\leq C \|\Psi_t(t_n) - \phi\|_{H^1(M)} \\ &\leq C \|\Psi_t(t_n) - \Psi_t(t)\|_{H^1(M)} \end{aligned}$$

Comme  $\Psi_t \in C([0, T], H^1(M))$ , et  $t_n \rightarrow t$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $\|\Psi_t(t_n) - \Psi_t(t)\|_{H^1(M)} \leq \varepsilon/C$ , donc  $\|\Psi_t(0) - \Psi_{t_n}(0)\|_{H^1(M)} \leq \varepsilon$  et donc,  $\Psi_{t_n}(0) \xrightarrow{H^1(M)} \Psi_t(0)$ .  $\diamond$

Vérifions maintenant que  $u(t)$  ainsi définie vérifie bien ce que l'on veut. Soit  $\theta \in C^\infty([0, T])$  à but réel et  $\phi \in C^\infty(M)$ . Soit  $\Psi_t$  les fonctions correspondantes à  $\phi$ , comme précédemment.

Notation :  $\partial_t \Psi_t(s) = \dot{\Psi}_t(s)$

On calcule :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^T \left\langle u(t), \phi(x) \dot{\theta}(t) - i\Delta \phi \theta - if(t, x) \phi \theta - ig(t, x) \overline{\phi \theta} \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \\
&= \int_0^T \left\langle u_0, \Psi_t(0) \dot{\theta}(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} + \int_0^T \left\langle u(t), -i\Delta \phi \theta - if(t, x) \phi \theta - ig(t, x) \overline{\phi \theta} \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \\
&= \left\langle u_0, \int_0^T \Psi_t(0) \dot{\theta}(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} + \int_0^T \left\langle u(t), -i\Delta \phi \theta - if(t, x) \phi \theta - ig(t, x) \overline{\phi \theta} \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \\
&= \text{IPP en t} \left\langle u_0, \Psi_T(0) \theta(T) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} - \left\langle u_0, \Psi_0(0) \theta(0) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} - \left\langle u_0, \int_0^T \dot{\Psi}_t(0) \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \int_0^T \left\langle u(t), -i\Delta \phi \theta - if(t, x) \phi \theta - ig(t, x) \overline{\phi \theta} \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \\
&= \text{notation} \theta(T) \left\langle u_0, \Psi_T(0) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} - \theta(0) \left\langle u_0, \Psi_0(0) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} + B \\
&= \text{définition de u(t)} \left\langle u_T, \phi \theta(T) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} - \left\langle u_0, \phi \theta(0) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} + B
\end{aligned}$$

On veut donc montrer  $B = 0$ . Or, pour tout  $t$ , par définition,  $\phi = \Psi_t(t)$  et comme  $\Psi_t(s)$  est solution de 6, on a

$$\begin{aligned}
B &= - \left\langle u_0, \int_0^T \dot{\Psi}_t(0) \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + \int_0^T \left\langle u(t), -i\Delta \Psi_t(t) \theta(t) - if(t, x) \Psi_t(t) \theta(t) - ig(t, x) \overline{\Psi_t(t) \theta(t)} \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \\
&= - \left\langle u_0, \int_0^T \dot{\Psi}_t(0) \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} + \int_0^T \left\langle u(t), -\partial_s \Psi_t(t) \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}}
\end{aligned}$$

Or, en dérivant par rapport à  $t$  l'expression  $\phi(x) = \psi_t(t)$ , on obtient  $0 = \partial_s \Psi_t(t) + \dot{\Psi}_t(t)$ . Donc

$$B = - \left\langle u_0, \int_0^T \dot{\Psi}_t(0) \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} + \int_0^T \left\langle u(t), \dot{\Psi}_t(t) \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}}$$

Or,  $\Psi_t$  est solution de  $i\partial_s \Psi_t(s) + \Delta \Psi_t(s) + f(s, x) \Psi_t(s) + g(s, x) \overline{\Psi_t(s)} = 0$ . On dérive cette expression par rapport à  $t$ . Donc  $i\partial_s \dot{\Psi}_t(s) + \Delta \dot{\Psi}_t(s) + f_1(s, x) \dot{\Psi}_t(s) + f_2(s, x) \overline{\dot{\Psi}_t(s)} = 0$ . Donc, à  $t$  fixé,  $\dot{\Psi}_t(s)$  correspond au  $\tilde{\phi} = \dot{\Psi}_t(t)$  dans la correspondance que l'on a faite entre les  $\phi$  et  $\Psi_t$ . Donc, par définition de  $u(t)$ ,  $\left\langle u(t), \dot{\Psi}_t(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} = \left\langle u_0, \dot{\Psi}_t(0) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}}$ , de sorte que  $B = 0$  comme voulu.

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\langle u(t), \phi(x) \dot{\theta}(t) - i\Delta \phi \theta - if(t, x) \phi \theta - ig(t, x) \overline{\phi \theta} \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} \\
&= \left\langle u_T, \phi \theta(T) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} - \left\langle u_0, \phi \theta(0) \right\rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}}
\end{aligned}$$

Ceci est donc vrai pour  $\theta$  réel. En réappliquant ce résultat avec  $\tilde{\phi} = i\phi$  et  $\theta$  réel, on obtient le résultat pour  $\theta$  imaginaire pure. On a alors le résultat voulu par densité des combinaisons linéaires de fonctions de la forme  $\theta(t)\phi(x)$  dans  $C^\infty([0, T], C^\infty(M))$

Le raisonnement fait dans la détermination de l'équation duale permet d'affirmer que  $u$  vérifie l'équation  $i\partial_t u + \Delta u + \bar{f} u - g \bar{u} = 0$ .

**Unicité :** Cela résulte toujours du raisonnement de la détermination de l'équation duale. En effet, une solution  $v(t)$  de  $i\partial_t v + \Delta v + \bar{f} v - g \bar{v} = 0$  avec  $v(0) = u_0$  doit nécessairement vérifier  $\langle v(t), \phi(t) \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}} = \text{cste} = \langle u_0, \phi_0 \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}}$ , si  $\phi$  est solution de l'équation duale. En particulier, on doit avoir pour tout  $\phi \in C^\infty(M)$ ,  $\langle v(t), \phi \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}} = \langle u_0, \Psi_t(0) \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}}$ , ce qui implique  $u = v$ . En fait, la définition de la solution que l'on a utilisé était la seule possible.

**Remarque 4** *L'équation duale reste vraie pour toute  $\phi \in C([0, T], H^1(M))$  telle que  $\partial_t \phi - i\Delta \phi - if\phi - ig\bar{\phi} \in L^1([0, T], H^1(M))$  puisque les formes linéaires de chaque côté de l'égalité sont bien définies sur cet espace et par densité des fonctions régulières.*

**Démonstration :** On va procéder par approximation en utilisant le lemme 11 de la partie Divers.

Soit  $\phi \in C([0, T], H^1(M))$  telle que  $i\partial_t \phi + \Delta \phi + f\phi + g\bar{\phi} = h \in L^1([0, T], H^1(M))$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $\phi_{\varepsilon,0} \in C^\infty(M)$  telle que  $\|\phi(0) - \phi_{\varepsilon,0}\|_{H^1(M)} \leq \varepsilon$ .

Soit  $f_\varepsilon \in C^\infty([0, T] \times M)$ , bornée dans  $L^2(L^\infty(M))$  telle que  $\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(H^1(M))} \leq \varepsilon$ .

On choisit  $g_\varepsilon$  vérifiant les mêmes propriétés par rapport à  $g$ .

Soit  $h_\varepsilon \in C^\infty([0, T] \times M)$  telles que  $\|h - h_\varepsilon\|_{L^1(H^1(M))} \leq \varepsilon$ .

On note  $\phi_\varepsilon$  la solution de

$$\begin{cases} i\partial_t \phi_\varepsilon + \Delta \phi_\varepsilon + f_\varepsilon \phi_\varepsilon + g_\varepsilon \bar{\phi}_\varepsilon &= h_\varepsilon \\ \phi_\varepsilon(0) &= \phi_{\varepsilon,0} \end{cases} \quad (7)$$

On vérifie que  $\phi_\varepsilon \in C^\infty([0, T] \times M)$ .

Le lemme 11 implique donc que

$$\|\phi - \phi_\varepsilon\|_{Y_T} \leq C(\|\phi(0)\|_{H^1(M)} + \|h\|_{L^1(H^1)} + 2)\varepsilon$$

En particulier, on a  $\phi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \phi$  dans  $Y_T$ .

Montrons que

$$(f_\varepsilon - f)\phi_\varepsilon \xrightarrow{L^1(H^1)} 0 \quad (8)$$

Soit  $\eta > 0$ . Si on note  $C$  la borne des  $f_\varepsilon$  dans  $L^2(L^\infty(M)) \cap L^2(H^1(M))$ .

La suite  $\phi_\varepsilon$  étant de Cauchy, on peut choisir  $\varepsilon_0$  tel que  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$  implique  $\|\phi_{\varepsilon_1} - \phi_{\varepsilon_2}\|_{Y_T} < \eta/4C$ .

On a, si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\begin{aligned}
\|(f_\varepsilon - f)\phi_\varepsilon\|_{L^1(H^1)} &\leq \|(f_\varepsilon - f)(\phi_\varepsilon - \phi_{\varepsilon_0})\|_{L^1(H^1)} + \|(f_\varepsilon - f)\phi_{\varepsilon_0}\|_{L^1(H^1)} \\
&\leq \|f_\varepsilon - f\|_{L^2(H^1) \cap L^2(L^\infty)} \|\phi_\varepsilon - \phi_{\varepsilon_0}\|_{L^2(H^1) \cap L^2(L^\infty)} \\
&\quad + \|f_\varepsilon - f\|_{L^2(H^1)} \|\phi_{\varepsilon_0}\|_{L^2(H^2)} \\
&\leq 2C\eta/(4C) + \|f_\varepsilon - f\|_{L^2(H^1)} \|\phi_{\varepsilon_0}\|_{L^2(H^2)}
\end{aligned}$$

De plus, comme  $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ , dans  $L^2(H^1)$  et  $\phi_{\varepsilon_0}$  est fixé dans  $C^\infty([0, T] \times M)$ , on trouve un  $\varepsilon'_0$  tel que pour  $\varepsilon < \varepsilon'_0$

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2(H^1)} \|\phi_{\varepsilon_0}\|_{L^2(H^2)} \leq \eta/2$$

Et on a donc  $\|(f_\varepsilon - f)\phi_\varepsilon\|_{L^1(H^1)} \leq \eta$ , comme voulu.

Et on obtient une inégalité du même type pour le terme en  $g\bar{\phi}$ .

Or, par définition de  $\phi_\varepsilon$  et  $h_\varepsilon$

$$i\partial_t \phi_\varepsilon + \Delta \phi_\varepsilon + f_\varepsilon \phi_\varepsilon + g_\varepsilon \bar{\phi}_\varepsilon \xrightarrow{L^1(H^1)} i\partial_t \phi + \Delta \phi + f \phi + g \bar{\phi}$$

On a donc par différence avec (8) :

$$i\partial_t \phi_\varepsilon + \Delta \phi_\varepsilon + f \phi_\varepsilon + g \bar{\phi}_\varepsilon \xrightarrow{L^1(H^1)} i\partial_t \phi + \Delta \phi + f \phi + g \bar{\phi}$$

Les  $\phi_\varepsilon$  étant réguliers, l'équation duale est bien vérifiée avec  $\phi_\varepsilon$ .

$$\Re \int_0^T \int_M [\partial_t \phi_\varepsilon - i\Delta \phi_\varepsilon - if \phi_\varepsilon - ig \bar{\phi}_\varepsilon] \bar{u} = \Re \int_M \phi_{\varepsilon, T} \bar{u}_T - \int_M \phi_{\varepsilon, 0} \bar{u}_0$$

Par passage à la limite, on a la même équation pour  $\phi$ .

### 3 Théorèmes de propagation

#### 3.1 Propagation de la convergence

**Théorème 5** Soient  $u_n$  une suite dans  $H^{-1}(M)$  de solutions de

$$i\partial_t u_n + \Delta u_n + f_n u_n + g_n \bar{u}_n = 0$$

avec des  $f_n$  et  $g_n$  tels que  $\|f_n\|_{L^2([0, T], H^1(M))} + \|f_n\|_{L^2([0, T], L^\infty(M))} \leq A$ , idem pour  $g_n$ .

De plus, on suppose qu'il existe  $u \in L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$  telle que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|_{H^{-1}(M)} \leq C, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^{-\frac{3}{2}}} \rightarrow 0$$

Alors, il existe une sous-suite  $(u_{n'})$  de  $(u_n)$  et une mesure positive  $\mu$  sur  $]0, T[ \times S^*M$  telle que pour tout opérateur pseudodifférentiel tangentiel  $A = A(t, x, D_x)$  d'ordre  $-2$  de symbole principal  $\sigma(A) = a_2(t, x, \xi)$ ,

$$(A(t, x, D_x)(u_{n'} - u), (u_{n'} - u))_{L^2([0, T] \times M)} \rightarrow \int_{]0, T[ \times S^*M} a_2(t, x, \xi) d\mu(t, x, \xi)$$

De plus, si  $G_s$  dénote le flot géodésique sur  $S^*M$ , on a pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$G_s(\mu) = \mu$$

**Dem :** Existence de la mesure : basée sur l'inégalité de Garding, voir [5] pour une introduction.

Propagation : Par la remarque 3,  $f_n u_n + g_n \bar{u}_n$  est bornée dans  $L^2([0, T], H^{-s})$  pour  $s > 1$ , donc on peut en extraire une sous-suite convergeant faiblement vers  $\Psi$  dans  $L^2([0, T], H^{-3/2})$ , par exemple. On note  $h_n = \Psi - (f_n u_n + g_n \bar{u}_n)$

En particulier, par passage à la limite dans l'équation vérifiée par  $u_n$ ,  $u$  vérifie l'équation :

$$i\partial_t u + \Delta u + \Psi = 0$$

$r_n = u_n - u$  est alors solution de

$$i\partial_t r_n + \Delta r_n = h_n$$

Notons  $L$  l'opérateur  $Lu = i\partial_t u + \Delta u$ . Soit  $\varphi = \varphi(t) \in C_0^\infty(]0, T[)$ ,  $B(x, D_x)$  un opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $-3$ , de symbole principal  $b_{-3}$ ,  $A(t, x, D_x) = \varphi(t)B(x, D_x)$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on note  $A_\varepsilon = \varphi B_\varepsilon = A e^{\varepsilon \Delta}$  pour la régularisation. Comme  $A_\varepsilon r_n$  et  $A_\varepsilon^* r_n$  sont  $C^\infty$ , on peut écrire  $(Lr_n, A_\varepsilon^* r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} = (h_n, A_\varepsilon^* r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)}$  et  $(A_\varepsilon r_n, Lr_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} = (A_\varepsilon r_n, h_n)_{L^2(]0, T[ \times M)}$ . On écrit de façon classique

$$\begin{aligned} \alpha_{n, \varepsilon} &= (Lr_n, A_\varepsilon^* r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} - (A_\varepsilon r_n, Lr_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} \\ &= ([A_\varepsilon, \Delta]r_n, r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} - i(\partial_t(A_\varepsilon)r_n, r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} \end{aligned}$$

Or,  $\partial_t(A_\varepsilon)$  est d'ordre  $-3$  donc

$$\sup_\varepsilon (\partial_t(A_\varepsilon)r_n, r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} \leq C \|r_n\|_{L^\infty(H^{-1}(M))} \|r_n\|_{L^\infty(H^{-2})}$$

qui tend vers 0 si  $n \rightarrow \infty$ .

Et  $\alpha_{n, \varepsilon}$  vaut aussi par définition :

$$\alpha_{n, \varepsilon} = (h_n, A_\varepsilon^* r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} - (A_\varepsilon r_n, h_n)_{L^2(]0, T[ \times M)}$$

Or,

$$\begin{aligned} |(h_n, A_\varepsilon^* r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)}| &\leq \|h_n\|_{L^2(H^{-3/2})} \|A_\varepsilon^* r_n\|_{L^2(H^{3/2})} \\ &\leq \|h_n\|_{L^2(H^{-3/2})} \|r_n\|_{L^2(H^{-3/2})} \\ &\leq C \|r_n\|_{L^\infty(H^{-3/2})} \end{aligned}$$

Donc,  $\sup_\varepsilon |(h_n, A_\varepsilon^* r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)}| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Et on fait de même pour l'autre terme. Donc,  $\sup_\varepsilon \alpha_{n, \varepsilon} \rightarrow 0$ .

On obtient donc, en faisant le  $\sup$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$(\varphi[B, \Delta]r_n, r_n)_{L^2(]0, T[ \times M)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$



Que l'on peut réécrire

$$\int_{]0,T[ \times S^*M} \varphi(t) \{ \sigma_2(\Delta), b_{-3} \} d\mu(t, x, \xi) = 0$$

Ce qui est exactement ce que l'on voulait.

**Corollaire 1** *Supposons que  $\omega \subset M$  satisfait à la propriété (A). Soit  $(u_n)$  une suite bornée de  $L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$ , convergeant faiblement vers  $u$ , de solutions de*

$$i\partial_t u_n + \Delta u_n + f_n u_n + g_n \bar{u}_n = 0$$

*telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2([0, T], H^{-1}(\omega))$  et  $\|f_n\|_{L^2([0, T], H^1(M))} + \|g_n\|_{L^2([0, T], L^\infty(M))} \leq A$ , idem pour  $g_n$ . Alors,  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2([0, T], H^{-1}(M))$*

**Démonstration :** Soit  $(u_{n_k})$  une sous-suite quelconque de  $(u_n)$ . Comme  $(u_{n_k})$  converge faiblement vers  $u$  dans  $L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$ , par le lemme 10 d'Aubin-Lions, il en existe une sous-suite  $(u_{n'})$  qui converge fortement vers  $u$  dans  $L^\infty([0, T], H^{-\frac{3}{2}})$ . D'après le théorème 5, il existe une mesure de défaut microlocal pour d'ordre  $-2$ , invariante par le flot géodésique. Or, comme  $u_n \rightarrow u$  (donc aussi  $(u_{n'})$ ) dans  $L^2([0, T], H^{-1}(\omega))$ ,

$$\mu = 0 \text{ sur } ]0, T[ \times S^*\omega$$

Par l'hypothèse (A), on a donc  $\mu = 0$  sur  $]0, T[ \times S^*M$ , c'est à dire  $(u_{n'}) \rightarrow u$  dans  $L^2([0, T], H^{-1}(M))$ . On a donc prouvé que toute sous-suite de  $u_n$  a une sous-suite convergeant vers  $u$  dans  $L^2([0, T], H^{-1}(M))$  donc  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2([0, T], H^{-1}(M))$ .

**Corollaire 2** *Si en plus du corollaire 1, on a  $u = 0$ , on a convergence dans  $L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$*

**Dem :** Comme  $u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2([0, T], H^{-1}(M))$ , on peut choisir  $t_0$  tel que  $u_n(t_0) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(M)$ . Par le théorème d'existence 4,  $\|u_n(t)\|_{H^{-1}(M)} \leq C(A)\|u_n(t_0)\|_{H^{-1}(M)}$  (et donc  $u_n \rightarrow 0$  dans  $L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$ ).

**Corollaire 3** *Si en plus du corollaire 1, on a  $f_n = f$  et  $g_n = g$  fixes, on a convergence dans  $L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$*

**Dem :**  $r_n = u_n - u$  vérifie les propriétés du corollaire 2. Donc la convergence se fait aussi dans  $L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$ .

### 3.2 Propagation de la régularité de $H^{-1}(M)$ à $H^1(M)$ .

On fait d'abord deux remarques préliminaires

**Remarque 5** On a vu à la remarque 3 que

$$\|fu\|_{H^1} \leq \|f\|_{H^1} \|u\|_{H^{1+\varepsilon}} \quad \forall \varepsilon > 0$$

et on a

$$\|fu\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}$$

Donc, par interpolation sur les  $H^s$ , pour l'application  $u \mapsto fu$ , si  $f \in L^\infty \cap H^1$ , et  $\theta \in [0, 1]$

$$\|fu\|_{H^\theta} \leq \|f\|_{L^\infty}^\theta \|f\|_{H^1}^{1-\theta} \|u\|_{H^{\theta(1+\varepsilon)}} \leq \max(\|f\|_{L^\infty}, \|f\|_{H^1}) \|u\|_{H^{\theta(1+\varepsilon)}}$$

Par dualité, si  $\theta \in [0, 1]$

$$\|fu\|_{H^{-\theta(1+\varepsilon)}} \leq \|f\|_{L^\infty}^\theta \|f\|_{H^1}^{1-\theta} \|u\|_{H^{-\theta}}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \langle fu, \varphi \rangle &= \langle u, \varphi f \rangle \\ &\leq \|u\|_{H^{-\theta}} \|\varphi f\|_{H^\theta} \\ &\leq \|u\|_{H^{-\theta}} \|f\|_{L^\infty}^\theta \|f\|_{H^1}^{1-\theta} \|\varphi\|_{H^{\theta(1+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

En particulier, si  $f$  dans  $L^2([0, T], H^1) \cap L^2([0, T], L^\infty)$  (donc  $\max(\|f(t)\|_{H^1}, \|f(t)\|_{L^\infty}) \in L^2([0, T])$ ) et  $u \in L^\infty([0, T], H^{r+\varepsilon})$ , alors  $fu \in L^2([0, T], H^r)$ , pour  $r \in [-1-\varepsilon, 1]$  et  $\varepsilon > 0$ .

$$\|fu\|_{L^2([0, T], H^r)} \leq \|\max(\|f(t)\|_{H^1}, \|f(t)\|_{L^\infty})\|_{L^2([0, T])} \|u\|_{L^\infty([0, T], H^{r+\varepsilon})}$$

**Remarque 6** Soit  $\varepsilon > 0$  et  $r \in [-1-\varepsilon, 1]$ . Si  $u$  est solution à valeur  $L^2([0, T], H^{r+\varepsilon})$  de

$$i\partial_t u + \Delta u + f u + g \bar{u} = h$$

avec  $f, g$  dans  $L^2([0, T], H^1) \cap L^2([0, T], L^\infty)$  et  $h$  dans  $L^1([0, T], H^r)$  alors  $u$  est à valeur  $C([0, T], H^r)$ .

On écrit la formule de Duhamel en choisissant  $t_0$  (noté 0 dans la formule) tel que  $u(t_0) \in H^{r+\varepsilon}$

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} f u(\tau) d\tau + i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} g \bar{u}(\tau) d\tau - i \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} h(\tau) d\tau$$

et on a  $fu, g\bar{u}$  et  $h \in L^1([0, T], H^r)$ .

**Lemme 2** Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\rho \leq 1/2$ . Soit  $r \in [-1+\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2]$ .

Si  $u$  est solution à valeur  $L^2_{loc}([0, T], H^r)$  de

$$i\partial_t u + \Delta u + f u + g \bar{u} = h$$

avec  $f, g$  dans  $L^2([0, T], H^1) \cap L^2([0, T], L^\infty)$  et  $h$  dans  $L^2_{loc}([0, T], H^{r-\varepsilon})$ .

On suppose aussi que  $u \in L^2_{loc}([0, T], H^{r+\rho-\varepsilon}(\omega))$  où  $\omega$  vérifie la condition (A). Alors  $u \in L^2_{loc}([0, T], H^{r+\rho-\varepsilon})$

**Démonstration :** Grâce aux remarques précédentes, on peut appliquer directement la proposition 13 de l'article [2].

Il suffit en effet de vérifier que  $fu \in L^2_{loc}([0, T[, H^{r-\varepsilon})$  (idem pour  $g\bar{u}$ ) et  $u \in C([0, T[, H^{r-\varepsilon})$ .

Or,  $u \in L^2_{loc}([0, T[, H^r)$  pour  $r \in [-1 + \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2] \subset [-1, 1 + \varepsilon/2]$ , est solution de Schrödinger avec terme linéaire, donc par la remarque 6,  $u \in C([0, T[, H^{r-\varepsilon/2})$ .

Or, par la remarque 5, comme  $u \in L^\infty_{loc}([0, T[, H^{r-\varepsilon/2})$  pour  $r \in [-1 + \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2]$ , donc  $r - \varepsilon/2 \in [-1, 1]$ , alors  $fu \in L^2_{loc}([0, T[, H^{r-\varepsilon})$ .

Donc, les remarques s'appliquent si  $r \in [-1 + \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2]$ .

**Lemme 3** Soit  $\varepsilon > 0$ .

Si  $u$  est solution à valeur  $C([0, T], H^{-1})$  de

$$i\partial_t u + \Delta u + f u + g \bar{u} = 0$$

avec  $f, g$  dans  $L^2([0, T], H^1) \cap L^2([0, T], L^\infty)$ .

On suppose aussi que  $u \in L^2_{loc}([0, T], H^{-1/2-\varepsilon}(\omega))$

Alors  $u \in L^2_{loc}([0, T[, H^{-1/2-\varepsilon})$

**Démonstration :** On applique la remarque 5 (elle s'applique bien, c'est le cas limite) et on obtient  $fu \in L^2_{loc}([0, T[, H^{-1-\varepsilon})$ . On a aussi  $u \in C([0, T[, H^{-1-\varepsilon})$ . Donc la proposition 13 de l'article [2] s'applique et on a  $u \in L^2_{loc}([0, T[, H^{-1/2-\varepsilon})$ .

**Théorème 6** Soit  $\varepsilon > 0$ .

Si  $u$  est solution à valeur  $C([0, T], H^{-1})$  de

$$i\partial_t u + \Delta u + f u + g \bar{u} = 0$$

avec  $f, g$  dans  $L^2([0, T], H^1) \cap L^2([0, T], L^\infty)$ .

On suppose aussi que  $u \in L^2_{loc}([0, T[, H^{3/2-\varepsilon}(\omega))$

Alors  $u \in L^2_{loc}([0, T[, H^{3/2-\varepsilon})$  et donc dans  $C([0, T], H^1)$

**Démonstration :** On applique d'abord le lemme 3 puis le lemme 2 tant que l'on peut.

On obtient ensuite  $C([0, T], H^1)$  en appliquant le théorème d'existence globale à partir d'un  $t_0$  tel que  $u(t_0) \in H^1(M)$ .

## 4 Contrôle linéaire

### 4.1 Inégalité d'observabilité dans $H^{-1}(M)$

**Théorème 7** Supposons que  $\omega$  vérifie la condition (A) et (B). Soit  $\varphi$  une fonction  $C^\infty$  réelle sur  $M$  égale à 1 sur  $\omega$ . Alors, pour tout  $T > 0, A > 0$ , il existe une constante  $C = C(T, A, \omega)$  telle que l'inégalité

$$\|u_0\|_{H^{-1}(M)}^2 \leq C \int_0^T \|\varphi u(t)\|_{H^{-1}(M)}^2 dt$$

soit vérifiée pour toute solution  $u(t, x)$  du système

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \bar{f} u - g \bar{u} &= 0 \text{ sur } [0, T] \times M \\ u(0) &= u_0 \in H^{-1}(M) \end{cases} \quad (9)$$

$\forall f, g$  tels que  $\|f\|_{L^2([0, T], H^1(M))} \leq A$  et  $\|f\|_{L^2([0, T], L^\infty(M))} \leq A$  et idem pour  $g$ .

**Dem :** Supposons l'inégalité non vérifiée, il existe donc une suite  $u_n$  de solution dans  $H^{-1}(M)$  avec des  $f_n$  et  $g_n$  avec les normes bornées par  $A$  tels que

$$\|u_n(0)\|_{H^{-1}(M)} = 1 \text{ et } \varphi u_n \xrightarrow{L^2([0, T], H^{-1}(M))} 0.$$

Par le lemme 9 d'Aubin-Lions, on trouve une sous-suite (encore appelée  $u_n$ ) et  $u \in L^\infty([0, T], H^{-1}(M))$  telle que  $u_n(t) \xrightarrow{H^{-1}(M)} u(t)$ .

Par le corollaire 1, on a en fait convergence forte de  $u_n$  vers  $u$  dans  $L^2([0, T], H^{-1}(M))$ .

Comme  $f_n$  est bornée dans  $L^2([0, T], H^1(M))$ , on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction  $f$ . On a pour toute  $\phi \in C^\infty([0, T] \times M)$

$$\langle f_n, \phi \rangle \leq A \|\phi\|_{L^2([0, T], L^1)}$$

donc  $\|f\|_{L^2([0, T], L^\infty(M))} \leq A$ . On prouve de même pour  $g_n \xrightarrow{L^2([0, T], H^1(M))} g$ .

Donc, comme  $f_n \xrightarrow{L^2([0, T], H^1(M))} f$  et  $u_n \xrightarrow{L^2([0, T], H^{-1}(M))} u$ , on a  $f_n u_n \xrightarrow{L^1([0, T] \times M)} fu$ .

Par passage à la limite,  $u$  est donc aussi solution de 9 avec  $f$  et  $g$ .

Or, comme  $\varphi u_n \xrightarrow{L^2([0, T], H^{-1}(M))} 0$ , on a  $\varphi u = 0$ .

De plus, par le théorème 6 de propagation de la régularité, on a en particulier  $u \in C([0, T], H^1(M))$ .

$u$  est donc solution dans  $C([0, T], H^1(M))$  de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \bar{f} u - g \bar{u} &= 0 \text{ sur } [0, T] \times M \\ u(0) &= u_0 \in H^1(M) \end{cases} \quad (10)$$

avec  $f, g \in L^2([0, T], H^1(M)) \cap L^2([0, T], L^\infty(M))$  et  $u = 0$  sur  $\omega$ . L'hypothèse de prolongement unique (B) implique donc  $u = 0$ .

Le corollaire 2 nous donne maintenant que  $u_n \xrightarrow{L^\infty([0, T], H^{-1}(M))} 0$ . Ce qui contredit  $\|u_n(0)\|_{H^{-1}(M)} = 1$ .

Et on prouve alors l'inégalité voulue.

**Remarque 7** On ne peut pas se passer de l'hypothèse de prolongement unique. En effet, elle est nécessaire puisqu'elle est impliquée par l'inégalité d'observabilité : si une solution d'une équation pour laquelle on a l'inégalité d'observabilité, vérifie  $\varphi u = 0$ , on a  $u_0 = 0$  et donc par le théorème 4 d'existence et unicité,  $u = 0$ .

## 4.2 Contrôle linéaire dans $H^1(M)$

**Théorème 8** Sous les condition (A) et (B). Soit  $f_1(t, x), f_2(t, x) \in L^2([0, T], H^1(M)) \cap L^2([0, T], L^\infty(M))$ . Soit  $u_0 \in H^1(M)$  et  $T > 0$ . Alors, il existe un contrôle  $g$

dans  $C(\mathbb{R}, H^1(M))$  à support dans  $[0, T] \times \omega$  tel que l'unique solution du système :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f_1 u + f_2 \bar{u} &= \tilde{g}, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases} \quad (11)$$

avec  $\tilde{g} = g$  si  $0 \leq t \leq T$  et 0 ailleurs, et satisfait  $u(t, \cdot) \equiv 0$  pour  $t \geq T$ .

**Dem :** Par un argument de compacité, on prouve qu'il existe un ouvert  $\omega'$  satisfaisant (A) et tel que  $\bar{\omega}' \subset \omega$ .

Argument rapide : pour tout  $m_0 = (x_0, \xi_0) \in S^*M$ , on trouve un temps  $t$  tel que le flot du Hamiltonien envoie ce point dans  $\omega$ . On trouve donc un petit voisinage compact  $V_{m_0}$  de  $m_0$  tel que le flot en temps  $t$  l'envoie dans  $\omega$ . Comme  $S^*M$  est compact, on le recouvre par de tels ouverts  $Int(V_{m_i})$  et on en trouve un sous recouvrement fini par des ouverts  $V_{m_i}$  qui arrivent en  $\omega$  en temps  $t_i$ . L'union de l'image par le flot en temps  $t_i$  des  $V_{m_i}$  est alors un ouvert vérifiant les propriétés voulues puisque le Hamiltonien de  $\Delta$  sera homogène d'ordre 2.

On introduit alors  $\varphi \in C^\infty(M)$  à valeur réelle, supportée dans  $\omega$  et telle que  $\varphi = 1$  sur  $\omega'$ .

On considère le système

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f_1 u + f_2 \bar{u} &= g \\ u(T) &= 0 \end{cases} \quad (12)$$

Soit  $v \in C_w([0, T], H^{-1}(M))$  définie dans le théorème d'existence 4.  $v$  vérifie l'équation duale dans  $H^{-1}(M)$  avec condition initiale  $v(0) = v_0$ . La fonction  $v$  est alors solution de

$$i\partial_t v + \Delta v + \bar{f}_1 v - f_2 \bar{v} = 0.$$

De plus, grâce à la remarque 4, si  $g \in L^1([0, T], H^1(M))$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Re \int_0^T \int_M [\partial_t u - i\Delta u - if_1 u - if_2 \bar{u}] \bar{v} &= \Re \int_M u_T \bar{v}_T - \int_M u_0 \bar{v}_0 \\ \Re \int_0^T \int_M -ig \bar{v} &= -\Re \int_M u_0 \bar{v}_0 \end{aligned}$$

On définit la fonction continue  $\Lambda : H^{-1}(M) \rightarrow H^1(M)$  par  $\Lambda v_0 = u_0$  avec le choix

$$g = -iAv = -i\varphi(x)(1 - \Delta)^{-1}\varphi(x)v(t, x)$$

On a alors bien  $g \in L^1([0, T], H^1(M))$  (et même  $L^\infty([0, T], H^1(M))$ ).

Donc,

$$\langle \Lambda v_0, v_0 \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}} = \int_0^T \langle Av, v \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}} = \int_0^T \|Bv(t)\|_{L^2}^2 dt$$

où on a noté  $Bv(t, x) = (1 - \Delta)^{-1/2}\varphi(x)v(t, x)$  et donc

$$\langle \Lambda v_0, v_0 \rangle_{\mathcal{D}'(M)_\mathbb{R}} = \int_0^T \|\varphi v(t)\|_{H^{-1}}^2 dt$$

De la même manière, si  $w_0 \in H^{-1}(M)$  et  $w$  solution de l'équation duale du théorème d'existence 4, on prouve

$$\langle \Lambda v_0, w_0 \rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}} = \int_0^T \langle Av, w \rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}}$$

Comme  $A$  est autoadjoint, l'opérateur  $\Lambda$  est donc aussi autoadjoint pour le produit scalaire réel  $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}'(M)_{\mathbb{R}}}$ . Or, par le théorème 7, la forme quadratique liée à  $\Lambda$  est aussi coercive, donc  $\Lambda$  est donc un isomorphisme de  $H^{-1}(M)$  dans  $H^1(M)$ . Ce qui donne le résultat voulu.

**Remarque 8** *La norme d'endomorphisme de  $\Lambda$  correspond à celle du flot linéaire, donc elle ne dépend que de  $T$  des normes de  $f_1$  et  $f_2$  et de  $\varphi$ .*

*La norme d'endomorphisme de  $\Lambda^{-1}$  est alors majorée par la constante de coercivité qui est en fait celle de l'inégalité d'observabilité.*

*On a donc que pour  $\|f_1\|_{L^2([0,T], H^1(M)) \cap L^2([0,T], L^\infty(M))} \leq A$  et idem pour  $f_2$ , alors les normes  $\Lambda$  et  $\Lambda^{-1}$  sont majorées par des constantes ne dépendant que de  $A$ ,  $T$  et  $\varphi$ .*

## 5 Contrôle non-linéaire près d'une trajectoire

Soit  $T > 0$ . Soit  $w_0$  dans  $H^1(M)$  et  $w$  la solution de

$$\begin{cases} i\partial_t w + \Delta w - P'(|w|^2)w &= 0 \\ w(x, 0) &= w_0(x) \end{cases} \quad (13)$$

Soit  $h(u) = P'(|u|^2)u$  pour  $u \in \mathbb{C}$ . On écrit

$$\begin{aligned} h(w+r) - h(w) &= Dh(w).r + \int_0^1 (1-s) D^2 h(w+rs).(r, r) ds \\ &= r \frac{\partial h}{\partial u}(w) + \bar{r} \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w) + r^2 \int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(w+rs) ds \\ &\quad + \bar{r}^2 \int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{u}^2}(w+rs) ds + 2r\bar{r} \int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial \bar{u}}(w+rs) ds \end{aligned}$$

On a alors dans ce cas  $\frac{\partial h}{\partial u}(w) \in L^2([0, T], H^1(M)) \cap L^2([0, T], L^\infty(M))$ .

En effet,  $w \in Y_T \subset L^\infty([0, T], H^1(M)) \cap L^p([0, T], L^\infty(M))$  pour tout  $p < \infty$  et  $\frac{\partial h}{\partial u}(w)$  est un polynôme en  $w$ .

Le théorème 8 a alors prouvé que sous les hypothèses (A) et (B), on a un contrôle pour l'équation linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u - u \frac{\partial h}{\partial u}(w) - \bar{u} \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w)$$

C'est à dire qu'il existe un isomorphisme  $S$  de  $H^{-1}(M)$  dans  $H^1(M)$  tel que pour tout  $u_0$  dans  $H^1(M)$ , il existe  $\Phi_0 = S^{-1}u_0$ ,  $u_0 = S\Phi_0$  tel que si  $\Phi$  est la solution du système dual

$$\begin{cases} i\partial_t \Phi + \Delta \Phi - \Phi \overline{\frac{\partial h}{\partial u}(w)} + \bar{\Phi} \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w) &= 0 \\ \Phi(x, 0) &= \Phi_0(x) \end{cases} \quad (14)$$

et  $u$  solution de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - u \frac{\partial h}{\partial u}(w) - \bar{u} \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w) &= -iA\Phi \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases} \quad (15)$$

On ait  $u(T) = 0$ .

On a aussi vu à la remarque 8 que les normes d'opérateur de  $S$  et  $S^{-1}$  ne dépendent que de  $T$ ,  $\omega$  (la fonction  $\varphi$  est construite sur  $\omega$ ) et de la norme de  $\frac{\partial h}{\partial u}(w)$  dans  $L^2([0, T], H^1(M)) \cap L^2([0, T], L^\infty(M))$  qui est lui même majoré par une constante  $C(T, \omega, \|w_0\|_{H^1(M)})$ .

**Théorème 9** *Sous les hypothèses précédentes, il existe  $\varepsilon(T, \omega, \|w_0\|_{H^1(M)})$  tel que pour tout  $u_0 \in H^1(M)$  tel que  $\|u_0 - w_0\|_{H^1} < \varepsilon$ , alors il existe  $g \in L^1([0, T], H^1(M))$  à support dans  $[0, T] \times \omega$  tel que l'unique solution  $u$  dans  $C([0, T], H^1(M))$  de*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - P'(|u|^2)u &= g \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases} \quad (16)$$

vérifie  $u(T) = w(T)$ .

De plus, on peut choisir  $g$  tel que l'on ait une estimation

$$\|g\|_{L^1([0, T], H^1(M))} \leq C(T, \omega, \|w_0\|_{H^1(M)})$$

**Dem :** On va chercher  $g$  sous la forme  $-iA\Phi$  où  $\Phi$  est solution du système 14, comme dans le contrôle linéaire. Le but est donc de choisir le  $\Phi_0$  adéquat et tout le système est alors déterminé.

Notons  $r = u - w$ , donc  $u = w + r$ , en faisant la différence entre 16 et 13, on vérifie que  $r$  doit vérifier l'équation :

$$\begin{cases} i\partial_t r + \Delta r - [P'(|w + r|^2)(w + r) - P'(|w|^2)(w)] &= -iA\Phi \\ r(x, 0) &= r_0(x) \end{cases} \quad (17)$$

Avec  $\|r_0\|_{H^1(M)} < \varepsilon$ . Et on cherche un contrôle tel que  $r(T) = 0$ .

On va décomposer  $r = r_1 + r_2$  avec  $r_1$  solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} i\partial_t r_1 + \Delta r_1 - r_1 \frac{\partial h}{\partial u}(w) - \bar{r}_1 \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w) &= -iA\Phi \\ r_1(x, T) &= 0 \end{cases} \quad (18)$$

qui correspond en fait à un contrôle linéaire, c'est à dire que  $r_1(0) = S\Phi_0$  et  $r_2$  solution de

$$\begin{cases} i\partial_t r_2 + \Delta r_2 - r_2 \frac{\partial h}{\partial u}(w) - \bar{r}_2 \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w) - \int_0^1 (1-s) D^2 h(w + rs) \cdot (r, r) ds &= 0 \\ r_2(x, T) &= 0 \end{cases} \quad (19)$$

Pour montrer que  $r_2$  est bien défini, il suffit de montrer que  $\int_0^1 (1-s)D^2h(w+rs).(r,r)ds$  est dans  $L^1([0,T], H^1(M))$ , pour  $\Phi_0$  dans  $H^{-1}(M)$ .

**Lemme 4** *Il existe  $C(T, \|w_0\|_{H^1(M)})$  tel que si  $\|\Phi_0\|_{H^{-1}(M)} < \eta(T, \|w_0\|_{H^1(M)})$  assez petit et  $T < 1$*

$$\int_0^1 (1-s)D^2h(w+rs).(r,r)ds \leq CT^\delta \|\Phi_0\|_{H^{-1}(M)}^2$$

avec  $\delta > 0$ ,  $\beta = \deg P$  et on suppose  $2\beta - 1 \geq 3 \Leftrightarrow \beta \geq 2$ .

**Remarque 9** *La condition  $\beta \geq 2$  n'est pas restrictive puisque le cas  $\beta = 1$  correspond à  $P' = cste$  qui correspond au cas linéaire que l'on sait déjà résoudre.*

**Dem :** On se contente de traiter le terme  $\left\| r^2 \int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(w+rs)ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))}$ ,

les autres termes en  $\bar{r}^2$  et  $r\bar{r}$  se traitant de la même façon.

Comme  $h$  est polynomial (en  $u$  et  $\bar{u}$ ) de degré  $2\beta - 1$ ,  $\frac{\partial^2 h}{\partial^2 u}$  est polynomial de degré  $2\beta - 3$ . Donc, comme  $\|u^k \bar{u}^l\|_{H^1(M)} \leq C\|u\|_{H^1(M)}\|u\|_{L^\infty(M)}^{k+l-1}$ , on a  $\|\frac{\partial^2 h}{\partial^2 u}(w+rs)\|_{H^1(M)} \leq C(1 + \|w+rs\|_{H^1(M)} + \|w+rs\|_{H^1(M)}\|w+rs\|_{L^\infty(M)}^{2\beta-4})$  et  $\|\frac{\partial^2 h}{\partial^2 u}(w+rs)\|_{L^\infty(M)} \leq C(1 + \|w+rs\|_{L^\infty(M)}^{2\beta-3}) \leq C(1 + \|w\|_{L^\infty(M)}^{2\beta-3} + \|r\|_{L^\infty(M)}^{2\beta-3})$  pour  $s \in [0, 1]$ . Donc

$$\begin{aligned} & \left\| r^2 \int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(w+rs)ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \\ & \leq C \int_0^T \|r\|_{H^1(M)} \|r\|_{L^\infty(M)} Q_1(\|w\|_{H^1(M)}, \|r\|_{H^1(M)}, \|w\|_{L^\infty(M)}, \|r\|_{L^\infty(M)}) \\ & \quad + \int_0^T \|r\|_{L^\infty(M)}^2 Q_2(\|w\|_{H^1(M)}, \|r\|_{H^1(M)}, \|w\|_{L^\infty(M)}, \|r\|_{L^\infty(M)}) \\ & \quad \text{où } Q_1, Q_2 \text{ sont des polynômes de degré au plus } 2\beta - 3 \\ & \leq R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Où  $R_2$  est une somme de termes de la forme

$$\int_0^T \|w\|_{H^1(M)}^a \|r\|_{H^1(M)}^b \|w\|_{L^\infty(M)}^c \|r\|_{L^\infty(M)}^{2+d}$$

Où  $a, b, c, d$  sont dans  $\mathbb{N}$ , que l'on peut majorer par

$$\begin{aligned} & \|w\|_{Y_T}^a \|r\|_{Y_T}^b \int_0^T \|w\|_{L^\infty(M)}^c \|r\|_{L^\infty(M)}^{2+d} \\ & \leq \|w\|_{Y_T}^a \|r\|_{Y_T}^b \|w\|_{L^p([0,T], L^\infty(M))}^c \|r\|_{L^p([0,T], L^\infty(M))}^{2+d} T^\gamma \text{ par Hölder en temps} \\ & \leq \|w\|_{Y_T}^{a+c} \|r\|_{Y_T}^{b+2+d} T^\gamma \end{aligned}$$



$R_1$  se traite de la même façon puisque somme de termes de la forme

$$\int_0^T \|w\|_{H^1(M)}^a \|r\|_{H^1(M)}^{1+b} \|w\|_{L^\infty(M)}^c \|r\|_{L^\infty(M)}^{1+d}$$

Avec  $\gamma = 1 - \frac{2+d+c}{p} > 0$  si  $p$  est assez grand. On obtient donc, si on suppose pour simplifier  $T^p < 1$ , avec un  $\delta > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} & \left\| r^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 h}{\partial^2 u}(w + rs) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \\ & \leq C(T, \|w_0\|_{H^1(M)}) T^\delta (\|r\|_{Y_T}^2 + \|r\|_{Y_T}^{2+k}) \end{aligned} \quad (20)$$

Reste donc à majorer  $\|r\|_{Y_T}$  en se basant sur l'équation non linéaire 17. Pour  $h(u) = P'(|u|^2)u$  pour  $u \in \mathbb{C}$ . On écrit  $h(w+r) - h(w) = r \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial u}(w+rs) ds + \bar{r} \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w+rs) ds$ . Par l'inégalité de Strichartz non-homogène de [1], et comme  $r(T) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|r\|_{Y_T} & \leq C \|A\Phi + h(w+r) - h(w)\|_{L^1([0,T], H^1(M))} + C \|r(T)\|_{H^1(M)} \\ & \leq C \|A\Phi\|_{L^1([0,T], H^1(M))} + \left\| r \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial u}(w+rs) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \\ & \quad + \left\| \bar{r} \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w+rs) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \end{aligned}$$

On se contente de majorer le terme en  $r$ , celui en  $\bar{r}$  se traitant de la même façon. Par le même type de majorations que le calcul précédent, comme  $\frac{\partial h}{\partial u}(w+rs)$  est encore polynomiale, on prouve que

$$\left\| r \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial u}(w+rs) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \leq C(T, \|w_0\|_{H^1(M)}) T^\lambda (\|r\|_{Y_T} + \|r\|_{Y_T}^{1+l})$$

Avec  $\lambda > 0$  et  $l \in \mathbb{N}$ . On obtient donc

$$\|r\|_{Y_T} \leq C \|A\Phi\|_{L^1([0,T], H^1(M))} + CT^\lambda (\|r\|_{Y_T} + \|r\|_{Y_T}^{1+l})$$

En fait, mis à part l'argument  $r(T) = 0$ , ce que l'on vient de prouver est vrai sur tout sous-intervalle  $[t_1, t_2]$  de  $[0, T]$  pour lequel on peut écrire :

$$\|r\|_{Y_{[t_1, t_2]}} \leq C(T, \|w_0\|_{H^1(M)}) \left( \|A\Phi\|_{L^1([0,T], H^1(M))} + \|r(t_1)\|_{H^1(M)} + (t_2 - t_1)^\lambda (\|r\|_{Y_{[t_1, t_2]}} + \|r\|_{Y_{[t_1, t_2]}}^{1+l}) \right)$$

Par un argument de type lemme du piège (voir paragraphe 8), on prouve que si  $\|A\Phi\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \leq C \|\Phi_0\|_{H^1(M)}$  est assez petit ( $\|r(T)\|_{H^1(M)} = 0$  est donc trivialement "assez petit") :

$$\|r\|_{Y_T} \leq C \|A\Phi\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \leq C(T, \|w_0\|_{H^1(M)}) \|\Phi_0\|_{H^{-1}(M)}$$

Ici, la notion de "assez petit" ne dépend que de  $T$  et de constante  $C(T, \|w_0\|_{H^1(M)})$ .  
Donc, par l'inégalité 20

$$\begin{aligned} \left\| r^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 h}{\partial^2 u}(w + rs) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} &\leq CT^\delta (\|\Phi_0\|_{H^{-1}(M)}^2 + \|\Phi_0\|_{H^{-1}(M)}^{2+k}) \\ &\leq CT^\delta \|\Phi_0\|_{H^{-1}(M)}^2 \end{aligned}$$

Si  $\phi_0$  est assez petit.  $\diamond$

On note  $L\Phi_0 = r(0) = r_1(0) + r_2(0) = S\Phi_0 + K\Phi_0$ .  $K\Phi_0 = r_2(0)$   
Donc  $L\Phi_0 = r_0$  équivaut à  $\Phi_0 = -S^{-1}K\Phi_0 + S^{-1}r_0$ . Si on définit  $B : H^{-1}(M) \rightarrow H^{-1}(M)$   
par

$$B\Phi_0 = -S^{-1}K\Phi_0 + S^{-1}r_0$$

On a alors  $L\Phi_0 = r_0$  si et seulement si  $\Phi_0$  est un point fixe de  $B$ . On va donc prouver que si  $\|r_0\|_{H^1(M)}$  est assez petit,  $B$  est contractante sur une petite boule  $B_R$  de  $H^{-1}(M)$ .

On peut supposer  $T < 1$ . On a

$$\|B\Phi_0\|_{H^{-1}(M)} \leq C(\|K\Phi_0\|_{H^1(M)} + \|r_0\|_{H^1(M)})$$

C'est à dire  $\|B\Phi_0\|_{H^{-1}(M)} \leq C(\|r_2(0)\|_{H^1(M)} + \|r_0\|_{H^1(M)})$ . Or, par la remarque 1 et comme  $r_2(T) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \|r_2(0)\|_{H^1(M)} \leq \|r_2\|_{Y_T} &\leq C \left\| \int_0^1 (1-s) D^2 h(w + rs) \cdot (r, r) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \\ &\leq \text{lemme 4} C \|\Phi_0\|_{H^{-1}(M)}^2 \end{aligned}$$

(si  $R$  est assez petit pour que le lemme 4 s'applique)

On en est donc à  $\|B\Phi_0\|_{H^{-1}(M)} \leq C(\|\Phi_0\|_{H^{-1}(M)}^2 + \|r_0\|_{H^1(M)})$ . Donc, pour  $R^2 < 1/2C$  et  $\|r_0\|_{H^1(M)} < R/2C$  assez petits,  $B$  envoie  $B_R$  dans  $B_R$ . On prouve qu'elle est contractante.

On examine le système obtenu par différence du système 19 avec deux solutions  $r$  et  $\tilde{r}$  correspondant respectivement à  $\Phi$  et  $\tilde{\Phi}$

$$\begin{cases} i\partial_t(r_2 - \tilde{r}_2) + \Delta(r_2 - \tilde{r}_2) - (r_2 - \tilde{r}_2) \frac{\partial h}{\partial u}(w) - \overline{(r_2 - \tilde{r}_2)} \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w) \\ - \left[ \int_0^1 (1-s) D^2 h(w + rs) \cdot (r, r) ds - \int_0^1 (1-s) D^2 h(w + \tilde{r}s) \cdot (\tilde{r}, \tilde{r}) ds \right] = 0 \\ (r_2 - \tilde{r}_2)(T) = 0 \end{cases}$$

et le système obtenu par la différence de 17 avec un  $r$  et  $\tilde{r}$

$$\begin{cases} i\partial_t(r - \tilde{r}) + \Delta(r - \tilde{r}) \\ - [P'(|w + r|^2)(w + r) - P'(|w + \tilde{r}|^2)(w + \tilde{r})] = -iA(\Phi - \tilde{\Phi}) \\ r(T) - \tilde{r}(T) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\|B(\Phi_0) - B(\widetilde{\Phi}_0)\|_{H^{-1}(M)} &\leq C \|K(\Phi_0) - K(\widetilde{\Phi}_0)\|_{H^1(M)} \\
&\leq C \|r_2(0) - \widetilde{r}_2(0)\|_{H^1(M)}
\end{aligned}$$

Or, par la remarque 1 et comme  $(r_2 - \widetilde{r}_2)(T) = 0$ , on a pour un  $C = C(T, \|w_0\|_{H^1})$  :

$$\begin{aligned}
\|B(\Phi_0) - B(\widetilde{\Phi}_0)\|_{H^{-1}(M)} &\leq C \left\| \int_0^1 (1-s) D^2 h(w + rs) \cdot (r, r) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 (1-s) D^2 h(w + \widetilde{r}s) \cdot (\widetilde{r}, \widetilde{r}) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))}
\end{aligned}$$

Or, c'est une somme finie de termes de la forme  $w^k(\bar{r}^{2+l}r^n - \widetilde{r}^{2+l}\widetilde{r}^n)$ ,  $w^k(\bar{r}^{1+l}r^{1+n} - \widetilde{r}^{1+l}\widetilde{r}^{1+n})$  ou  $w^k(\bar{r}^l r^{2+n} - \widetilde{r}^l \widetilde{r}^{2+n})$  dont on peut majorer (si " $p$  assez grand") la norme  $L^1([0, T], H^1(M))$  par  $CT^\delta \|r - \widetilde{r}\|_{Y_T} \left( \|r\|_{Y_T}^{1+l} + \|\widetilde{r}\|_{Y_T}^{1+l} \right) \|w\|_{Y_T}^k$

Cela donne alors

$$\begin{aligned}
\|B(\Phi_0) - B(\widetilde{\Phi}_0)\|_{H^{-1}(M)} &\leq C \|r - \widetilde{r}\|_{Y_T} \left( \|r\|_{Y_T} + \|\widetilde{r}\|_{Y_T} + \|r\|_{Y_T}^{2\beta-2} + \|\widetilde{r}\|_{Y_T}^{2\beta-2} \right) \\
&\leq C \|r - \widetilde{r}\|_{Y_T} \left( \|\Phi_0\|_{Y_T} + \|\widetilde{\Phi}_0\|_{Y_T} + \|\Phi_0\|_{Y_T}^{2\beta-2} + \|\widetilde{\Phi}_0\|_{Y_T}^{2\beta-2} \right) \\
&\leq CR \|r - \widetilde{r}\|_{Y_T} \text{ si } R \text{ assez petit}
\end{aligned}$$

En appliquant le même type d'inégalités au système 21 de  $r - \widetilde{r}$

$$\begin{aligned}
\|r - \widetilde{r}\|_{Y_T} &\leq \left\| h(w + r) - h(w + \widetilde{r}) + A(\Phi - \widetilde{\Phi}) \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \\
&\leq \|h(w + r) - h(w + \widetilde{r})\|_{L^1([0,T], H^1(M))} + C \|A(\Phi - \widetilde{\Phi})\|_{L^\infty([0,T], H^1(M))} \\
&\leq \left\| (r - \widetilde{r}) \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial u}(w + (r - \widetilde{r})s) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} \\
&\quad + \left\| \overline{(r - \widetilde{r})} \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(w + (r - \widetilde{r})s) ds \right\|_{L^1([0,T], H^1(M))} + C \|\Phi_0 - \widetilde{\Phi}_0\|_{H^1(M)}
\end{aligned}$$

Par les mêmes majorations que dans le lemme 4, on obtient successivement

$$\|r - \widetilde{r}\|_{Y_T} \leq C \|\Phi_0 - \widetilde{\Phi}_0\|_{H^1(M)} + CT^\lambda (\|r - \widetilde{r}\|_{Y_T} + \|r - \widetilde{r}\|_{Y_T}^{1+l})$$

Et pour  $R$  assez petit, par le lemme du piège, on obtient

$$\|r - \widetilde{r}\|_{Y_T} \leq C \|\Phi_0 - \widetilde{\Phi}_0\|_{H^1(M)}$$

On obtient donc

$$\|B(\Phi_0) - B(\widetilde{\Phi}_0)\|_{H^{-1}(M)} \leq CR \|\Phi_0 - \widetilde{\Phi}_0\|_{H^1(M)}$$

Donc,  $B$  est une contraction si  $R$  est assez petit.

Reste à prouver la majoration sur la norme de  $g$ . En fait, on a

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1([0,T],H^1(M))} &= \|A\Phi\|_{L^1([0,T],H^1(M))} \\ &\leq C \|\Phi_0\|_{H^1(M)} \\ &\leq CR \\ &\leq C(T, \|w_0\|_{H^1(M)}) \text{ par choix}\end{aligned}$$

**Remarque 10** En échangeant 0 et  $T$ , c'est à dire en inversant le temps, et comme  $e^{-it\Delta}$  a les mêmes propriétés que  $e^{it\Delta}$ , on prouve de même que si  $w$  est la solution de NLS avec  $w(T) = w_T$  et si  $\|u_T - w_T\|_{H^1} < \varepsilon$ , alors il existe  $g \in L^1([0,T], H^1(M))$  à support dans  $[0,T] \times \omega$  tel que l'unique solution  $u$  de NLS avec terme source  $g$  et condition initiale  $u(T) = u_T$  vérifie  $u(0) = w(0)$ . C'est à dire que l'on peut de même contrôler en "sens inverse".

**Remarque 11** On remarque que dans ce qu'on a montré et en utilisant la remarque 10, le  $\varepsilon$  ne dépend que de  $\|w\|_{Y_T}$  (c'est à dire de  $\|w_T\|_{H^1(M)}$ ) et de la constante  $C$  du contrôle linéaire, qui ne dépend elle même que de  $\|f\|_{L^2([0,T],H^1(M))} + \|f\|_{L^2([0,T],L^\infty(M))}$  qui peut d'après notre choix de  $f = \frac{\partial h}{\partial u}(w)$  être dominée par  $\|w_T\|_{H^1(M)}$  (idem pour  $g$ ). On a donc montré qu'à  $T$  fixé, et pour un  $A$  fixé, il existe un  $\varepsilon$  tel que pour tout  $w_T$  tel que  $\|w_T\|_{H^1(M)} \leq A$ , on peut contrôler près de  $w$  si  $\|u_T - w_T\|_{H^1} < \varepsilon$ .

## 6 Contrôle non-linéaire vers 0

En faisant le changement d'inconnue  $u(t, \cdot) = \exp(i\lambda t)v(t, \cdot)$ , on remplace  $P'$  par  $(P' + \lambda)$ . Par l'hypothèse  $P' \rightarrow_{r \rightarrow +\infty} +\infty$ , on peut donc supposer  $P'(r) \geq 1$ , si  $r \geq 0$ .

En particulier, on a  $E(u) \geq \|u\|_{H^1}$

On fait aussi le choix d'une non-linéarité de la forme  $P = \sum_k p_k x^{\alpha_k}$  avec  $p_k > 0$  et  $\alpha_k \geq 1$  car  $P(0) = 0$ . Cela contient ainsi le cas classique  $P = x^\alpha$  que l'on transforme en  $P = x^\alpha + x$  par changement d'inconnue.

On remarque alors que si  $\lambda \in [0, 1]$  alors,  $E(\lambda u) \leq \lambda^2 E(u)$

$$\begin{aligned}E(\lambda u) &= \lambda^2 \int_M |\nabla u|^2 + \sum_k p_k \lambda^{2\alpha_k} \int_M |u|^{2\alpha_k} \\ &\leq \lambda^2 \int_M |\nabla u|^2 + \lambda^2 \sum_k p_k \int_M |u|^{2\alpha_k} \quad \text{car } \lambda^{2\alpha_k} \leq \lambda^2 \\ &\leq \lambda^2 E(u)\end{aligned}$$

**Théorème 10** Supposons que  $\omega$  vérifie les hypothèses (A) et (B) et  $P$  à coefficients positifs. Alors, pour tout  $A \geq 0$ , il existe un  $T(A)$  et  $C(A)$  tel que pour tout  $w_0 \in H^1(M)$  vérifiant

$$E(w_0) \leq A$$

on ait un contrôle  $g \in L^1([0, T], H^1(M))$  pour NLS tel que l'on ait  $w(T) = 0$ .  
De plus, on peut choisir  $g$  tel que  $\|g\|_{L^1([0, T(A)], H^1(M))} \leq C(A)$ .

**Démonstration :** On va procéder par contrôles successifs près de trajectoires de NLS. A chaque étape, on va faire un contrôle près de la trajectoire de NLS correspondant au point de départ. On choisira le point d'arrivée (nécessairement proche du point d'arrivée sans terme de contrôle) de sorte que l'énergie diminue. Cela sera possible puisque le flot de NLS sans terme source conserve l'énergie.

Soit  $A \geq 0$  et  $w_0 \in H^1(M)$  tel que  $E(w_0) \leq A$ .

Soit  $T < 1$  quelconque.

Notons  $\varepsilon$  le  $\varepsilon(T, A)$  correspondant à  $T$  et  $A$  dans le théorème 9 de contrôle près d'une trajectoire.

Soit  $\tilde{\varepsilon}$  celui qui correspond à  $A = 0$ , c'est à dire le contrôle près de 0.

Soit  $w$  solution de NLS avec  $w(0) = w_0$ .

$$\begin{cases} i\partial_t w + \Delta w - P'(|w|^2)w &= 0 \\ w(x, 0) &= w_0(x) \end{cases} \quad (22)$$

On a donc  $E(w(T)) = E(w_0)$  par conservation de l'énergie donc  $\|w_T\|_{H^1} \leq A$ .  
En particulier, on a un contrôle non linéaire près de  $w$  pour le  $\varepsilon$ . On choisit le point d'arrivée  $u_T = (1 - \varepsilon/A)w_T$  de sorte que

$$\|u_T - w_T\|_{H^1} = \varepsilon/A \|w_T\|_{H^1} \leq \varepsilon$$

Le théorème 9 fournit donc un  $g$  à support dans  $[0, T] \times \omega$  tel que si  $u$  est la solution de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - P'(|u|^2)u &= g \\ u(x, 0) &= w_0(x) \end{cases} \quad (23)$$

on ait aussi  $u(T) = u_T$ .

Si  $1 - \varepsilon/A > 0$ , on a  $E(u_T) \leq (1 - \varepsilon/A)^2 E(w_T) = (1 - \varepsilon/A)^2 E(w_0)$ .

On a encore  $A \geq E(u_T)$  donc on peut réitérer avec le même  $\varepsilon$  sur l'intervalle  $[T, 2T]$ .

On construit ainsi une suite de contrôles  $g_n$  dans  $L^1([nT, (n+1)T], H^1(M))$  et de solutions  $u_n$  dans  $C([nT, (n+1)T], H^1(M))$  de

$$\begin{cases} i\partial_t u_n + \Delta u_n - P'(|u_n|^2)u_n &= g_n \\ u_n(x, nT) &= u_{n-1}(x, nT) \end{cases} \quad (24)$$

avec  $E(u_n(nT)) \leq (1 - \varepsilon/A)^2 E(u_{n-1}((n-1)T))$  donc  $E(u_n(nT)) \leq (1 - \varepsilon/A)^{2n} E(w_0) \leq (1 - \varepsilon/A)^{2n} A$ .

En particulier, il existe  $N$  ne dépendant que de  $A$  (et du  $T$  arbitraire) tel que

$$(1 - \varepsilon/A)^{2N} A \leq \tilde{\varepsilon}$$

De sorte que l'on a un contrôle vers 0 en temps  $T$  à partir de  $u_n(NT)$ .

Si on recolle les  $u_n$  (respectivement les  $g_n$ ) en une fonction  $u$  de  $C([0, (N +$

$1)T], H^1(M))$  (respectivement  $g$  dans  $L^1([0, (N+1)T], H^1(M))$ ), on obtient une fonction  $u$  solution de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - P'(|u|^2)u &= g \\ u(x, 0) &= w_0(x) \end{cases} \quad (25)$$

et telle que  $u((N+1)T) = 0$ .

On a alors  $\|g\|_{L^1([0, (N+1)T], H^1(M))} = \sum \|g_n\|_{L^1([nT, (n+1)T], H^1(M))} \leq C(A)$

En fait, si on avait  $1 - \varepsilon/A \leq 0$ , c'est à dire  $\|v_T\|_{H^1(M)} \leq A \leq \varepsilon$ , c'est que le théorème 9 nous permettrait de contrôler directement vers 0 en une seule étape.

## 7 Théorèmes de prolongement unique et inégalités de Carleman

Ces résultats s'obtiennent à partir d'inégalités à poids dites de Carleman. L'idée générale est de conjuguer l'opérateur par un poids de la forme  $e^{-\gamma\Phi}$ . Lorsque le paramètre  $\gamma$  devient grand, cette modification permet en quelque sorte d'accentuer l'effet de l'opérateur.

### 7.1 Cas du tore en dimension 2

Dans cette section, on se propose de prouver de façon très élémentaire un théorème d'unicité dans un cas très particulier, celui de la métrique plate sur le tore. On va pour cela prouver une inégalité de Carleman. On utilisera ensuite ce résultat pour expliciter le prolongement unique sur le tore annoncé dans l'introduction.

**Théorème 11** *Soit  $P = i\partial_t + \partial_x^2 + \partial_y^2$  l'opérateur de Schrödinger.*

*Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ .*

*Soit  $\Phi(t, x, y)$  une fonction poids réelle telle que*

$$\nabla_{\mathbb{R}^2} \Phi \text{ ne s'annule pas sur } K \quad (26)$$

$$D_{\mathbb{R}^2}^2 \Phi \text{ est définie positive sur } K \quad (27)$$

(où l'indice  $\mathbb{R}^2$  indique que l'on ne considère que les dérivées en espace  $x$  et  $y$ ). Alors, il existe  $\gamma_0 > 0$ ,  $C > 0$  telle que  $\forall \gamma \geq \gamma_0$  et  $\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$  à support dans  $K$

$$\|e^{\gamma\Phi} P v\|_{L^2}^2 \geq C\gamma \|e^{\gamma\Phi} \nabla_{\mathbb{R}^2} v\|_{L^2} + C\gamma^3 \|e^{\gamma\Phi} v\|_{L^2}$$

**Démonstration :** On note  $P_{\gamma, \Phi} u = e^{\gamma\Phi} P e^{-\gamma\Phi} u$  l'opérateur de conjugaison.

$$\begin{aligned} P_{\gamma, \Phi} u &= P u - i\gamma(\partial_t \Phi)u + \gamma^2(\partial_x \Phi)^2 u - 2\gamma(\partial_x \Phi)(\partial_x u) - \gamma(\partial_x^2 \Phi)u \\ &\quad + \gamma^2(\partial_y \Phi)^2 u - 2\gamma(\partial_y \Phi)(\partial_y u) - \gamma(\partial_y^2 \Phi)u \\ &= \Re P_{\gamma, \Phi} + i\Im P_{\gamma, \Phi} \end{aligned}$$

Où

$$\Re P_{\gamma, \Phi} u = Pu + \gamma^2 (\partial_x \Phi)^2 u + \gamma^2 (\partial_y \Phi)^2 u$$

et

$$\begin{aligned} \Im P_{\gamma, \Phi} u &= -\gamma (\partial_t \Phi) u - \gamma (\partial_x \Phi) (D_x u) - \gamma D_x (\partial_x \Phi) u - \gamma (\partial_y \Phi) (D_y u) - \gamma D_y (\partial_y \Phi) u \\ &= -\gamma [(\partial_t \Phi) u - 2(\partial_x \Phi) (D_x u) - 2(\partial_y \Phi) (D_y u) - (D_x \partial_x \Phi) u - (D_y \partial_y \Phi) u] \end{aligned}$$

On note aussi pour simplifier l'écriture

$$\begin{aligned} f_{\gamma, \Phi} &= \gamma^2 (\partial_x \Phi)^2 + \gamma^2 (\partial_y \Phi)^2 \\ &= \gamma^2 \|\nabla_{\mathbb{R}^2} \Phi\|^2 \end{aligned}$$

On a alors en notant  $(u, v)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\mathbb{R}^2} u \bar{v}$  et si  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2)$  à support dans  $K$ .

$$\begin{aligned} \|P_{\gamma, \Phi} u\|_{L^2}^2 &= \|\Re P_{\gamma, \Phi} u\|_{L^2}^2 + \|\Im P_{\gamma, \Phi} u\|_{L^2}^2 \\ &\quad - i (\Re P_{\gamma, \Phi} u, \Im P_{\gamma, \Phi} u)_{L^2} + i (\Im P_{\gamma, \Phi} u, \Re P_{\gamma, \Phi} u)_{L^2} \end{aligned}$$

Or, comme  $D_x$  est autoadjoint et  $\Phi$  est réelle,  $\Re P_{\gamma, \Phi}$  et  $\Im P_{\gamma, \Phi}$  sont autoadjoints (en fait, il s'agit de la décomposition d'un opérateur  $A$  en sa partie réelle autoadjointe  $\frac{A+A^*}{2}$  et imaginaire antiautoadjointe  $\frac{A-A^*}{2}$ ), on a donc

$$\begin{aligned} \|P_{\gamma, \Phi} u\|_{L^2}^2 &= \|\Re P_{\gamma, \Phi} u\|_{L^2}^2 + \|\Im P_{\gamma, \Phi} u\|_{L^2}^2 \\ &\quad + ([\Re P_{\gamma, \Phi}, i \Im P_{\gamma, \Phi}] u, u)_{L^2} \end{aligned}$$

Il faut donc calculer tous les commutateurs. On notera par la suite  $\mathcal{O}_\Phi$  une quantité majoré par une constante ne dépendant que de  $\Phi$  et de  $K$ . En pratique, cela dépendra au fait des normes  $L^\infty(K)$  des premières dérivées de  $\Phi$ .

$$([i\partial_t, -i\gamma(\partial_t \Phi) - \gamma(\partial_y^2 \Phi)] u, u) = -\gamma ((\partial_t^2 \Phi) + (\partial_t \partial_y^2 \Phi) u, u) = \gamma \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} ([i\partial_t, -2\gamma(\partial_x \Phi) \partial_x] u, u) &= -2i\gamma ((\partial_{tx} \Phi) \partial_x u, u) \\ |[i\partial_t, -2\gamma(\partial_x \Phi) \partial_x] u, u| &\leq C_\Phi \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + C_\Phi \gamma^2 \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité  $ab \leq \frac{a^2}{2\gamma} + \frac{\gamma b^2}{2}$  En sommant (28) et (29), on obtient pour  $\gamma$  assez grand

$$([i\partial_t, i\Im P_{\gamma, \Phi}] u, u) = \mathcal{O}_\Phi \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \gamma^2 \|u\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned} ([\partial_x^2, -i\gamma(\partial_t \Phi)] u, u) &= -2i\gamma ((\partial_{tx} \Phi) \partial_x u, u) - i\gamma ((\partial_t \partial_x^2 \Phi) u, u) \\ &= \mathcal{O}_\Phi \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 + \gamma \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} ([\partial_x^2, -2\gamma(\partial_x \Phi) \partial_x] u, u) &= -4\gamma ((\partial_x^2 \Phi) \partial_x^2 u, u) - 2\gamma ((\partial_x^3 \Phi) \partial_x u, u) \\ \text{par une IPP} &= 4\gamma ((\partial_x^2 \Phi) \partial_x u, \partial_x u) + 4\gamma ((\partial_x^3 \Phi) \partial_x u, u) \\ &\quad + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \\ &= 4\gamma ((\partial_x^2 \Phi) \partial_x u, \partial_x u) + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} ([\partial_x^2, -2\gamma(\partial_y\Phi)\partial_y] u, u) &= -4\gamma((\partial_{xy}\Phi)\partial_{xy}u, u) - 2\gamma((\partial_x^2\partial_y\Phi)\partial_yu, u) \quad (32) \\ \text{par une IPP} &= 4\gamma((\partial_{xy}\Phi)\partial_xu, \partial_yu) + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_yu\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ([\partial_x^2, -\gamma(\partial_x^2\Phi)] u, u) &= -\gamma((\partial_x^2\Phi)u, u) - 2\gamma((\partial_x\Phi)\partial_xu, u) \\ &= \mathcal{O}_\Phi \gamma \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_xu\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \quad (33) \end{aligned}$$

En écrivant le même type d'égalités pour  $\partial_y^2$ , et en sommant (30), (31), (32) et (33), on obtient

$$([\Delta, i\mathfrak{S}P_{\gamma,\Phi}] u, u) = 4\gamma \int D_{\mathbb{R}^2}^2 \Phi(\nabla_{\mathbb{R}^2}u, \overline{\nabla_{\mathbb{R}^2}u}) + \mathcal{O}_\Phi \|\nabla_{\mathbb{R}^2}u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2$$

$$([f_{\gamma,\Phi}, -i\gamma(\partial_t\Phi) - \gamma(\partial_x^2\Phi) - \gamma(\partial_y^2\Phi)] u, u) = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} ([f_{\gamma,\Phi}, -2\gamma(\partial_x\Phi)\partial_x] u, u) &= 2\gamma((\partial_x\Phi)(\partial_x f_{\gamma,\Phi})u, u) \quad (35) \\ &= 2\gamma^3((\partial_x\Phi)[2(\partial_x\Phi)(\partial_x^2\Phi) + 2\partial_y\Phi\partial_{xy}\Phi] u, u) \\ &= 4\gamma^3([( \partial_x\Phi)^2(\partial_x^2\Phi) + (\partial_x\Phi)(\partial_y\Phi)\partial_{xy}\Phi] u, u) \end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned} ([f_{\gamma,\Phi}, -2\gamma(\partial_y\Phi)\partial_y] u, u) \quad (36) \\ = 4\gamma^3([( \partial_y\Phi)^2(\partial_y^2\Phi) + (\partial_y\Phi)(\partial_x\Phi)\partial_{yx}\Phi] u, u) \end{aligned}$$

En particulier, en sommant (35) et (36)

$$\begin{aligned} ([f_{\gamma,\Phi}, -2\gamma(\partial_x\Phi)\partial_x] u, u) + ([f_{\gamma,\Phi}, -2\gamma(\partial_y\Phi)\partial_y] u, u) \quad (37) \\ = 4\gamma^3([D_{\mathbb{R}^2}^2\Phi \cdot (\nabla_{\mathbb{R}^2}\Phi, \nabla_{\mathbb{R}^2}\Phi)] u, u) \end{aligned}$$

En sommant tout les commutateurs, on obtient donc

$$\begin{aligned} ([\Re P_{\gamma,\Phi}, i\mathfrak{S}P_{\gamma,\Phi}] u, u) &= 4\gamma \int D_{\mathbb{R}^2}^2 \Phi(\nabla_{\mathbb{R}^2}u, \overline{\nabla_{\mathbb{R}^2}u}) + 4\gamma^3([D^2\Phi \cdot (\nabla_{\mathbb{R}^2}\Phi, \nabla_{\mathbb{R}^2}\Phi)] u, u) \\ &\quad + \mathcal{O}_\Phi \|\nabla_{\mathbb{R}^2}u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \gamma^2 \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Or, on a supposé  $D_{\mathbb{R}^2}^2\Phi$  définie positive, en particulier, elle est coercive et il existe  $C > 0$  tel que sur le compact  $K$ , on ait  $D^2\Phi \cdot (v, \bar{v}) \geq C \|v\|^2$ . De plus, on a aussi supposé  $\nabla_{\mathbb{R}^2}\Phi$  ne s'annulant pas sur  $K$ , et en particulier il existe tel que  $\|\nabla_{\mathbb{R}^2}\Phi\|^2 \geq C$  sur  $K$  et  $D_{\mathbb{R}^2}^2\Phi \cdot (\nabla_{\mathbb{R}^2}\Phi, \nabla_{\mathbb{R}^2}\Phi) \geq C$ . On a donc

$$([\Re P_{\gamma,\Phi}, i\mathfrak{S}P_{\gamma,\Phi}] u, u) \geq C\gamma \|\nabla_{\mathbb{R}^2}u\|_{L^2} + C\gamma^3 \|u\|_{L^2} + \mathcal{O}_\Phi \|\nabla_{\mathbb{R}^2}u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \gamma^2 \|u\|_{L^2}^2$$

Et donc pour il existe  $\gamma'_0$  tel que pour  $\gamma \geq \gamma'_0$ ,

$$([\Re P_{\gamma,\Phi}, i\mathfrak{S}P_{\gamma,\Phi}] u, u) \geq C\gamma \|\nabla_{\mathbb{R}^2}u\|_{L^2} + C\gamma^3 \|u\|_{L^2}$$



En particulier, on a

$$\|P_{\gamma, \Phi} u\|_{L^2}^2 \geq C\gamma \|\nabla_{\mathbb{R}^2} u\|_{L^2} + C\gamma^3 \|u\|_{L^2}$$

On applique ce résultat à  $u = e^{\gamma\Phi} v$  pour  $v \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$  à support dans  $K$ .

Comme  $\nabla_{\mathbb{R}^2} e^{\gamma\Phi} v = e^{\gamma\Phi} \nabla_{\mathbb{R}^2} v + \gamma e^{\gamma\Phi} v \nabla_{\mathbb{R}^2} \Phi$ , on a

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathbb{R}^2} e^{\gamma\Phi} v\|_{L^2} &\geq \|e^{\gamma\Phi} \nabla_{\mathbb{R}^2} v\|_{L^2} - \gamma \|e^{\gamma\Phi} v \nabla_{\mathbb{R}^2} \Phi\|_{L^2} \\ &\geq \|e^{\gamma\Phi} \nabla_{\mathbb{R}^2} v\|_{L^2} + \gamma \mathcal{O}_\Phi \|e^{\gamma\Phi} v\|_{L^2} \end{aligned}$$

Donc pour  $\gamma \geq \gamma_0$ , on a

$$\|e^{\gamma\Phi} P v\|_{L^2}^2 \geq C\gamma \|e^{\gamma\Phi} \nabla_{\mathbb{R}^2} v\|_{L^2} + C\gamma^3 \|e^{\gamma\Phi} v\|_{L^2}$$

◇

**Remarque 12** *Le fait que la fonction  $u$  soit à support compact fixé est primordial puisque c'est grâce à cela que l'on peut faire les intégrations par partie.*

**Remarque 13** *L'inégalité de Carleman peut être étendue à des fonctions moins régulières par densité.*

On va utiliser ces inégalités pour obtenir un théorème d'unicité.

**Théorème 12** *Soit  $\Phi(t, x, y)$  une fonction poids vérifiant les hypothèses du théorème 11 définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2$ . Soit  $P$  l'opérateur de Schrödinger.*

*Soit  $z_0 \in \Omega$  tel que  $\Phi(z_0) = 0$ .*

*Soit  $u \in C^\infty$  vérifiant presque partout sur  $\Omega$*

$$|Pu|(t, x) \leq C(|u|(t, x) + |\nabla_{\mathbb{R}^2} u|(t, x))$$

*et telle que  $u = 0$  sur  $\Omega \cap \{\Phi \geq 0\}$ .*

*Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $z_0$  tel que  $u = 0$  sur  $V$ .*

**Démonstration :** Pour simplifier l'écriture, on va supposer  $z_0 = 0$  et on note  $Pu = f$ .

On va appliquer l'inégalité de Carleman du théorème 11 à la fonction poids modifiée

$$\Psi(t, x, y) = \Phi(t, x, y) + \delta^3 - 2\delta(t^2 + x^2 + y^2)$$

où  $\delta > 0$  sera choisi assez petit pour que l'on ait encore les hypothèses du théorème 11 sur un voisinage compacte de 0 (c'est possible puisqu'il s'agit d'une hypothèse ouverte sur les dérivées premières et secondes).

Soit  $\chi(t, x, y)$  une fonction troncature  $C^\infty$  valant 1 si  $|(t, x, y)| \leq \delta$  et 0 si  $|(t, x, y)| \geq 2\delta$ .

On applique l'inégalité du théorème 11 à  $\chi u$ .

$$\|e^{\gamma\Psi} P\chi u\|_{L^2}^2 \geq C\gamma^3 \|e^{\gamma\Psi} \chi u\|_{L^2} + C\gamma \|e^{\gamma\Psi} \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi u)\|_{L^2} \quad (38)$$

Or,  $P\chi u = \chi Pu + [P, \chi] u = \chi f + [P, \chi] u$ . Donc

$$\begin{aligned} \|e^{\gamma\Psi} P\chi u\|_{L^2}^2 &\leq \|e^{\gamma\Psi} [P, \chi] u\|_{L^2}^2 + \|e^{\gamma\Psi} \chi f\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|e^{\gamma\Psi} [P, \chi] u\|_{L^2}^2 + C \|e^{\gamma\Psi} \chi u\|_{L^2} + C \|e^{\gamma\Psi} \chi \nabla_{\mathbb{R}^2}(u)\|_{L^2} \\ &\leq \|e^{\gamma\Psi} [P, \chi] u\|_{L^2}^2 + C \|e^{\gamma\Psi} \chi u\|_{L^2} + C \|e^{\gamma\Psi} \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi u)\|_{L^2} + C \|e^{\gamma\Psi} u \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi)\|_{L^2} \end{aligned}$$

En combinant avec l'inégalité de Carleman (38), on obtient

$$\begin{aligned} \|e^{\gamma\Psi} [P, \chi] u\|_{L^2}^2 + C \|e^{\gamma\Psi} \chi u\|_{L^2} + C \|e^{\gamma\Psi} \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi u)\|_{L^2} + C \|e^{\gamma\Psi} u \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi)\|_{L^2} \\ \geq C\gamma^3 \|e^{\gamma\Psi} \chi u\|_{L^2} + C\gamma \|e^{\gamma\Psi} \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi u)\|_{L^2} \end{aligned}$$

Et donc pour  $\gamma$  assez grand

$$\|e^{\gamma\Psi} [P, \chi] u\|_{L^2}^2 + C \|e^{\gamma\Psi} u \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi)\|_{L^2} \geq C\gamma^3 \|e^{\gamma\Psi} \chi u\|_{L^2} + C\gamma \|e^{\gamma\Psi} \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi u)\|_{L^2} \quad (39)$$

Or, le support de  $[P, \chi] u$  est contenu dans  $\text{supp } u \cap \text{supp } \nabla \chi \subset \{\Phi \leq 0\} \cap \{|(t, x, y)| \geq \delta\} \subset \{\Psi \leq -\delta^3\}$ .

En particulier, on a

$$\|e^{\gamma\Psi} [P, \chi] u\|_{L^2}^2 \leq e^{-\gamma\delta^3} \|[P, \chi] u\|_{L^2}^2$$

et de même

$$\|e^{\gamma\Psi} u \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi)\|_{L^2} \leq e^{-\gamma\delta^3} \|u \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi)\|_{L^2}$$

Donc,  $\|e^{\gamma\Psi} [P, \chi] u\|_{L^2} \xrightarrow{\gamma \rightarrow +\infty} 0$  et  $\|e^{\gamma\Psi} u \nabla_{\mathbb{R}^2}(\chi)\|_{L^2} \xrightarrow{\gamma \rightarrow +\infty} 0$ . En particulier, grâce à l'inégalité (39), on a

$$\gamma^3 \|e^{\gamma\Psi} \chi u\|_{L^2} \xrightarrow{\gamma \rightarrow +\infty} 0$$

Cela implique en particulier,  $\chi u = 0$  là où  $\Psi > 0$ . En particulier, comme  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Psi(0) = \delta^3$ . Donc, par continuité, on peut choisir un voisinage  $V$  de 0 tel que l'on ait  $\Psi(z) > \delta^3/2$  et  $\chi = 1$  sur  $V$ . Donc on a bien  $u = 0$  sur  $V$ .

**Remarque 14** *Le théorème précédent s'applique en particulier au cas qui nous intéresse où  $u$  est solution de*

$$\tilde{P}u = Pu + a_0 u + a_x \partial_x u + a_y \partial_y u + b_0 \bar{u} + b_x \partial_x \bar{u} + b_y \partial_y \bar{u} = 0$$

où  $a_0, a_x, a_y, b_0, b_x, b_y \in L^\infty(K)$ .

On va faire une petite variante utile dans notre cas du théorème précédent. On rajoute aux hypothèses du théorème 12 le fait que  $\Phi$  ne dépende que des variables d'espace et on gagne une certaine "uniformité" en temps.

**Lemme 5** Soit  $\Omega$  un ouvert d'adhérence compact de  $\mathbb{R}^2$ , et soit  $\Phi$  et  $u$  vérifiant les hypothèses du théorème 12 sur  $]0, T[ \times \overline{\Omega}$ . On demande en plus que  $\Phi$  ne dépende que des variables d'espace  $(x, y)$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t_0 \in ]0, T[$  et tout  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tel que  $\Phi(x_0, y_0) = 0$ , il existe  $V_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2$  voisinage de  $(x_0, y_0)$  tel que  $u = 0$  sur tout  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V_{(x_0, y_0)}$  inclus dans  $]0, T[ \times \overline{\Omega}$ .

De plus, on peut choisir  $\varepsilon$  et  $V_{(x_0, y_0)}$  indépendant de  $t_0$  (il ne dépendent en fait que de  $\Phi$  et  $\Omega$ ).

**Démonstration :** C'est une légère modification de celle du théorème précédent. On doit juste préciser l'ouvert  $V$  dans ce contexte. On note

$$\Psi_{(t_0, x_0, y_0)}(t, x, y) = \Phi(x, y) + \delta^3 - 2\delta((t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

On choisit  $\delta$  assez petit pour avoir que  $\Psi_{(t_0, x_0, y_0)}$  vérifie les conditions (26) et (27) du théorème 11 sur le compact  $[t_0 - 1, t_0 + 1] \times \overline{\Omega}$  (1 étant bien sûr ici arbitraire).

Pour appliquer le même raisonnement, il suffit de trouver des  $\varepsilon$  et  $V_{(x_0, y_0)}$  tels que

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V_{(x_0, y_0)} \subset B((t - t_0, x - x_0, y - y_0), \delta) \quad (40)$$

$$\Psi_{(t_0, x_0, y_0)} > \delta^3/2 \text{ sur } ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V_{(x_0, y_0)} \quad (41)$$

Pour avoir la condition (40), il suffit, par exemple, d'imposer  $\varepsilon < \delta/\sqrt{2}$  et  $V_{(x_0, y_0)} \subset B((x - x_0, y - y_0), \delta/\sqrt{2})$ . On veut maintenant trouver des  $V_{(x_0, y_0)}$  vérifiant (41). Si on choisit en plus  $\varepsilon < \delta/(2\sqrt{2})$ , on a pour  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

$$\Psi_{(t_0, x_0, y_0)}(t, x_0, y_0) = \delta^3 - 2\delta(t - t_0)^2 > \delta^3 - 2\delta\varepsilon^2 > 3\delta^3/4$$

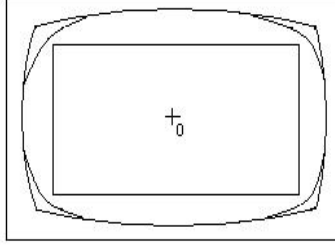
Donc, par continuité de  $\Psi_{(t_0, x_0, y_0)}$ , on a  $\Psi_{(t_0, x_0, y_0)} > \delta^3/2$  sur un voisinage  $\tilde{V}_{(t_0, x_0, y_0)}$  de  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \{(x_0, y_0)\}$ . Or, par compacité de  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  et par la définition de la topologie produit,  $\tilde{V}_{(t_0, x_0, y_0)}$  contient un ouvert de la forme  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V_{(x_0, y_0)}$  où  $V_{(x_0, y_0)}$  est un voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

La condition (41) est alors vérifiée permettant de terminer la démonstration comme dans le théorème 12. Le fait que l'on puisse choisir un même  $V_{(x_0, y_0)}$  pour tous les  $t_0$  se déduit alors immédiatement du fait que toutes les conditions que l'on a décrite ne dépendent en fait que des distances  $t - t_0$ .  $\diamond$

On va appliquer les résultats précédents pour propager la nullité d'un voisinage des 2 grands axes du tore  $\mathbb{T}^2$  vers le tore tout entier. Pour décrire la construction, on représentera le tore  $\mathbb{T}^2$  par un carré et le voisinage des grands axes par une bande le long du carré extérieur.

On va d'abord construire une courbe  $\Phi = 0$  sur  $\mathbb{T}^2$  qui soit strictement convexe et incluse dans la bande extérieure. On la construit grâce à 4 arcs de cercle qui auront une équation de la forme  $\Phi(x, y) = C((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - B = 0$

dont le gradient ne s'annule pas près de  $\Phi = 0$  et dont la dérivée seconde en les variables d'espace est bien définie positive. On voit ensuite facilement qu'il est possible de recoller ces 4 arcs de cercle de façon  $C^\infty$  tout en gardant la propriété de stricte convexité et de non annulation de la dérivée.



On note  $C_r$  la dilatation de rapport  $r$  et de centre  $O$  de la courbe que l'on vient de construire. On associe à chacune de ces courbes  $C_r$  une fonction strictement convexe  $\Phi_r$  telle que  $C_r = \{\Phi_r = 0\}$  que l'on définit autour de  $C_r$ . On note aussi  $D_{r_1, r_2}$  la bande comprise entre  $C_{r_1}$  et  $C_{r_2}$ .

Pour prouver le théorème d'unicité, on va montrer le lemme suivant qui implique immédiatement le théorème de prolongement voulu :

**Lemme 6** *Si  $u$  est solution de  $\tilde{P}u = 0$  ( $\tilde{P}$  comme à la remarque 14) et vérifie  $u = 0$  sur  $[0, T]$  et à l'extérieur de  $C_{r_1}$ , alors il existe  $\tilde{r} < r_1$  tel que  $u = 0$  sur  $[0, T]$  et à l'extérieur de  $C_{\tilde{r}}$ .*

**Démonstration :** Soit  $0 < r_2 < r_1 < r_3$  quelconque tels que  $C_{r_3}$  soit inclus dans le rectangle correspondant au tore. On va directement utiliser le lemme 5. On prend  $\Omega = D_{r_2, r_3}$  sur lequel  $\Phi_{r_1}$  vérifie bien les conditions du lemme (il est pour cela nécessaire d'éviter le point  $O$ ).

Le lemme donne alors  $\varepsilon > 0$  et des voisinages  $V_{(x_0, y_0)}$  des points  $(x_0, y_0)$  de  $C_{r_1}$ , ceux-ci ne dépendant que de  $\Omega$  et de  $\Phi_{r_1}$ .

On a alors  $u = 0$  sur tous les  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V_{(x_0, y_0)}$  pourvus que  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \subset [0, T]$ .

Par compacité, on recouvre  $C_{r_1}$  par un nombre fini de  $V_{(x_0, y_0)}$  et on trouve un  $\tilde{r}$  tel que l'extérieur de  $C_{\tilde{r}}$  est contenu dans les  $V_{(x_0, y_0)}$ .

En particulier,  $u = 0$  à l'extérieur de  $C_{\tilde{r}}$  et sur  $[0, T]$ .

En particulier, le théorème de prolongement unique s'applique dans le sens : on propage la nullité de l'extérieur du cercle vers l'intérieur. On voit alors facilement que ce procédé permet de propager la nullité sur un voisinage des 2 grands axes du tore  $\mathbb{T}^2$  vers le tore tout entier :

En considérant l'infimum des  $r$  tels que  $u = 0$  sur  $[0, T]$  et à l'extérieur de  $C_r$ , on voit que cela ne peut être que 0 sauf si l'ensemble est vide. Donc si  $u = 0$  à l'extérieur d'un  $C_r$ ,  $u = 0$  partout. Ceci est en particulier le cas si  $u = 0$  sur la

bande extérieure.

## 7.2 Cas de la sphère $S^2$

Ecrivons d'abord l'équation de Schrödinger en coordonnées. On se place en coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$ . Un point de  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  de coordonnées  $(\theta, \varphi)$  ayant pour coordonnées cartésiennes

$$M(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi)$$

De sorte que l'on ait la base de vecteurs tangents

$$\begin{aligned} d\theta_{(\theta_0, \varphi_0)} &= \frac{d}{dt}M(\theta_0 + t, \varphi_0) = (-\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \cos \theta_0 \cos \varphi_0, 0) \\ d\varphi_{(\theta_0, \varphi_0)} &= \frac{d}{dt}M(\theta_0, \varphi_0 + t) = (-\cos \theta_0 \sin \varphi_0, -\sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \varphi_0) \end{aligned}$$

Lorsqu'on munit  $S^2$  de la métrique issue de  $\mathbb{R}^3$ , cela donne

$$\begin{aligned} \|d\theta_{(\theta_0, \varphi_0)}\|^2 &= \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + \cos^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + 0 = \cos^2 \varphi_0 \\ \|d\varphi_{(\theta_0, \varphi_0)}\|^2 &= \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1 \\ \langle d\theta_{(\theta_0, \varphi_0)}, d\varphi_{(\theta_0, \varphi_0)} \rangle &= \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 - \cos \theta_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne la matrice des  $g_{ij}$ ,

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \varphi_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est la matrice des  $g^{ij}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \varphi_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'opérateur de Schrödinger s'écrit alors

$$\begin{aligned} P &= i\partial_t + \Delta \\ &= i\partial_t + \sum \partial_i (g^{ij} \partial_j) \\ &= i\partial_t + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \partial_\theta^2 + \partial_\varphi^2 \end{aligned}$$

qui a pour le poids  $(1, 2, 2)$  le symbole principal

$$p = \tau - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \xi_1^2 - \xi_2^2$$

On refait le même raisonnement que précédemment :

$$\begin{aligned}
P_{\gamma, \Phi} u &= Pu - i\gamma(\partial_t \Phi)u + \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\gamma^2(\partial_\theta \Phi)^2 u - 2\gamma(\partial_\theta \Phi)(\partial_\theta u) - \gamma(\partial_\theta^2 \Phi)u] \\
&\quad + \gamma^2(\partial_\varphi \Phi)^2 u - 2\gamma(\partial_\varphi \Phi)(\partial_\varphi u) - \gamma(\partial_\varphi^2 \Phi)u \\
&= \Re P_{\gamma, \Phi} u + i\Im P_{\gamma, \Phi} u
\end{aligned}$$

Où

$$\Re P_{\gamma, \Phi} u = Pu + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \gamma^2(\partial_\theta \Phi)^2 u + \gamma^2(\partial_\varphi \Phi)^2 u$$

et

$$\begin{aligned}
\Im P_{\gamma, \Phi} u &= -\gamma(\partial_t \Phi)u - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \gamma(\partial_\theta \Phi)(D_\theta u) - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \gamma D_\theta(\partial_\theta \Phi)u - \gamma(\partial_\varphi \Phi)(D_\varphi u) - \gamma D_\varphi(\partial_\varphi \Phi)u \\
&= -\gamma \left[ (\partial_t \Phi)u - 2\frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi)(D_\theta u) - 2(\partial_\varphi \Phi)(D_\varphi u) - \frac{1}{\cos^2 \varphi} (D_\theta \partial_\theta \Phi)u - (D_\varphi \partial_\varphi \Phi)u \right]
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que cela constitue bien la décomposition en partie adjointe et antiautoadjointe. Il reste donc à voir ce qui change dans les commutateurs.

$$f_{\gamma, \Phi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \gamma^2(\partial_\theta \Phi)^2 + \gamma^2(\partial_\varphi \Phi)^2$$

De la même manière, pour  $\gamma$  assez grand, on obtient

$$([i\partial_t, i\Im P_{\gamma, \Phi}] u, u) = \mathcal{O}_\Phi \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \gamma^2 \|u\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned}
\left( \left[ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \partial_\theta^2, -i\gamma(\partial_t \Phi) \right] u, u \right) &= -2i\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{t\theta} \Phi) \partial_\theta u, u \right) - i\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_t \partial_\theta^2 \Phi) u, u \right) \\
&= \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\theta u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 + \gamma \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \left[ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \partial_\theta^2, -2\frac{1}{\cos^2 \varphi} \gamma(\partial_\theta \Phi) \partial_\theta \right] u, u \right) &= -4\gamma \left( \frac{1}{\cos^4 \varphi} (\partial_\theta^2 \Phi) \partial_\theta^2 u, u \right) - 2\gamma \left( \frac{1}{\cos^4 \varphi} (\partial_\theta^3 \Phi) \partial_\theta u, u \right) \quad (43) \\
\text{par une IPP} &= 4\gamma \left( \frac{1}{\cos^4 \varphi} (\partial_\theta^2 \Phi) \partial_\theta u, \partial_\theta u \right) + 4\gamma \left( \frac{1}{\cos^4 \varphi} (\partial_\theta^3 \Phi) \partial_\theta u, u \right) \\
&\quad + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\theta u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \\
&= 4\gamma \left( \frac{1}{\cos^4 \varphi} (\partial_\theta^2 \Phi) \partial_\theta u, \partial_\theta u \right) + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\theta u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\theta u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \left[ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \partial_\theta^2, -2\gamma(\partial_\varphi \Phi) \partial_\varphi \right] u, u \right) &= -4\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{\theta\varphi} \Phi) \partial_{\theta\varphi} u, u \right) - 2\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta^2 \partial_\varphi \Phi) \partial_\varphi u, u \right) \\
&\quad + 4\gamma \left( (\partial_\varphi \Phi) \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} \partial_\theta^2 u, u \right) \quad (45) \\
\text{par une IPP} &= 4\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{\theta\varphi} \Phi) \partial_\theta u, \partial_\varphi u \right) - 4\gamma \left( \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\varphi \Phi) \partial_\theta u, \partial_\theta u \right) \\
&\quad + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\theta u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\varphi u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

$$\left( \left[ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \partial_\theta^2, -\gamma \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta^2 \Phi) - \gamma (\partial_\varphi^2 \Phi) \right] u, u \right) = \mathcal{O}_\Phi \gamma \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2$$

$$\left( \left[ \partial_\varphi^2, -i\gamma (\partial_t \Phi) - \gamma \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta^2 \Phi) - \gamma (\partial_\varphi^2 \Phi) \right] u, u \right) = \mathcal{O}_\Phi \gamma \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\theta u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned} \left( \left[ \partial_\varphi^2, -2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} \gamma (\partial_\theta \Phi) \partial_\theta \right] u, u \right) &= -4\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{\varphi\theta} \Phi) \partial_{\varphi\theta} u, u \right) - 8\gamma \left( \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) \partial_{\varphi\theta} u, u \right) \\ &\quad + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\theta u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \text{par une IPP} &= 4\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{\varphi\theta} \Phi) \partial_\varphi u, \partial_\theta u \right) + 8\gamma \left( \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) \partial_\varphi u, \partial_\theta u \right) \\ &\quad + \mathcal{O}_\Phi \gamma \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\varphi u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (51)$$

(en remarquant ici que

$$\gamma \left( \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) \partial_\varphi u, \partial_\theta u \right) = \gamma \left( \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) \partial_\theta u, \partial_\varphi u \right) + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\theta u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\varphi u\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned} \left( \left[ \partial_\varphi^2, -2\gamma (\partial_\varphi \Phi) \partial_\varphi \right] u, u \right) &= -4\gamma \left( (\partial_\varphi^2 \Phi) \partial_\varphi^2 u, u \right) - 2\gamma \left( (\partial_\varphi^3 \Phi) \partial_\varphi u, u \right) \\ \text{par une IPP} &= 4\gamma \left( (\partial_\varphi^2 \Phi) \partial_\varphi u, \partial_\varphi u \right) + \mathcal{O}_\Phi \|\partial_\varphi u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (52)$$

En sommant (42), (43), (44) et (47), on obtient

$$\begin{aligned} ([\Delta, i\mathfrak{S}P_{\gamma, \Phi}] u, u) &= 4\gamma \left( (\partial_\varphi^2 \Phi) \partial_\varphi u, \partial_\varphi u \right) + 4\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{\varphi\theta} \Phi) \partial_\varphi u, \partial_\theta u \right) \\ &\quad + 8\gamma \left( \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) \partial_\varphi u, \partial_\theta u \right) + 4\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{\theta\varphi} \Phi) \partial_\theta u, \partial_\varphi u \right) \\ &\quad - 4\gamma \left( \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\varphi \Phi) \partial_\theta u, \partial_\theta u \right) + 4\gamma \left( \frac{1}{\cos^4 \varphi} (\partial_\theta^2 \Phi) \partial_\theta u, \partial_\theta u \right) \\ &\quad + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\nabla_{\mathbb{R}^2} u\|_{L^2}^2 \\ &= 4\gamma \int H(\nabla_{\mathbb{R}^2} u, \overline{\nabla_{\mathbb{R}^2} u}) + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_\Phi \|\nabla_{\mathbb{R}^2} u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

où on a noté  $H$  la forme hermitienne de matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^4 \varphi} (\partial_\theta^2 \Phi) - \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\varphi \Phi) & \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{\theta\varphi} \Phi) \\ \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_{\theta\varphi} \Phi) & (\partial_\varphi^2 \Phi) \end{pmatrix}$$

$$\left( \left[ f_{\gamma, \Phi}, -i\gamma (\partial_t \Phi) - \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta^2 \Phi) u - (\partial_\varphi^2 \Phi) u \right] u, u \right) = 0 \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \left[ f_{\gamma, \Phi}, -2\gamma \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) \partial_\theta \right] u, u \right) = 2\gamma \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) (\partial_\theta f_{\gamma, \Phi}) u, u \right) \quad (54) \\
& = 2\gamma^3 \left( (\partial_\theta \Phi) \left[ 2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi) (\partial_\theta^2 \Phi) + 2 (\partial_\varphi \Phi) (\partial_{\theta\varphi} \Phi) \right] u, u \right) \\
& = 4\gamma^3 \left( \left[ \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi)^2 (\partial_\theta^2 \Phi) + (\partial_\theta \Phi) (\partial_\varphi \Phi) (\partial_{\theta\varphi} \Phi) \right] u, u \right)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
& ([f_{\gamma, \Phi}, -2\gamma (\partial_\varphi \Phi) \partial_\varphi] u, u) = 2\gamma ((\partial_\varphi \Phi) (\partial_\varphi f_{\gamma, \Phi}) u, u) \quad (55) \\
& = 4\gamma^3 \left( \left[ \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\varphi \Phi) (\partial_\theta \Phi) (\partial_{\varphi\theta} \Phi) + (\partial_\varphi \Phi) \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi)^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2 (\partial_\varphi^2 \Phi) \right] u, u \right)
\end{aligned}$$

En particulier, en sommant (54) et (55)

$$\begin{aligned}
& ([f_{\gamma, \Phi}, i\Im P_{\gamma, \Phi}] u, u) + ([f_{\gamma, \Phi}, -2\gamma (\partial_y \Phi) \partial_y] u, u) \quad (56) \\
& = 4\gamma^3 (g_\Phi u, u)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
g_\Phi &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi)^2 (\partial_\theta^2 \Phi) + (\partial_\theta \Phi) (\partial_\varphi \Phi) (\partial_{\theta\varphi} \Phi) \\
&+ \frac{1}{\cos^2 \varphi} (\partial_\varphi \Phi) (\partial_\theta \Phi) (\partial_{\varphi\theta} \Phi) + (\partial_\varphi \Phi) \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\theta \Phi)^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2 (\partial_\varphi^2 \Phi)
\end{aligned}$$

En sommant tout les commutateurs, on obtient donc

$$\begin{aligned}
([\Re P_{\gamma, \Phi}, i\Im P_{\gamma, \Phi}] u, u) &= 4\gamma \int H(\nabla_{\mathbb{R}^2} u, \overline{\nabla_{\mathbb{R}^2} u}) + 4\gamma^3 (g_\Phi u, u) \\
&+ \mathcal{O}_\Phi \|\nabla_{\mathbb{R}^2} u\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \mathcal{O}_\Phi \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Une condition suffisante pour l'établissement d'une inégalité de Carleman est donc la défini positivité de  $H$ , la stricte positivité de  $g_\Phi$  et que  $\Phi$  soit sans point singulier.

On a encore comme dans le cas du tore une condition ouverte, ce qui permet d'avoir le même théorème de prolongement.

Si on suppose que  $\Phi$  ne dépend que de  $\varphi$ , les conditions précédentes se résument à

$$\begin{aligned}
& -\frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} (\partial_\varphi \Phi) > 0 \\
& (\partial_\varphi^2 \Phi) > 0
\end{aligned}$$

que l'on obtient par exemple avec la fonction  $\Phi = e^\varphi$  et la condition  $\varphi < 0$ . Cela correspond à prendre pour ligne de niveau les "parallèles".



En refaisant les mêmes raisonnements que dans le cas du tore, on obtient alors un résultat de prolongement global pour la sphère.

Dans le cas  $\varphi < 0$ , si on a la nullité sur  $\{0 > \varphi > \varphi_1\}$ , on peut donc prolonger la nullité à un ensemble  $\{0 > \varphi > \varphi_2\}$  où  $\varphi_1 > \varphi_2$  (toujours sur  $[0, T]$ ).

En échangeant si nécessaire les pôles, on peut ainsi prolonger la nullité d'un coté à l'autre d'une "parallèle"  $\varphi = \text{cte}$  de la sphère dans le sens équateur vers pôle. Si on a la nullité sur un voisinage de l'équateur et sur  $[0, T]$ , on a donc nullité partout.

### 7.3 Résultats connus dans le cas de termes de potentiels peu réguliers

Les deux inégalités de Carleman que l'on vient de démontrer sont en fait des cas particuliers de théorèmes plus généraux. En particulier, il existe des conditions très générales sur la fonction  $\Phi$  pour obtenir ce type d'inégalités dans le cas où l'opérateur est de symbole principal elliptique ou réel. Ces conditions appelées pseudo-convexité par rapport au symbole  $p(x, \xi)$  de l'opérateur font intervenir les dérivées premières et secondes de  $\Phi$ . Une de ces conditions est par exemple que

$$p = \{p, \Phi\} = 0 \implies \{p, \{p, \Phi\}\} > 0 \text{ sur } \{\Phi = 0\} \quad (57)$$

On pourra pour cela se référer à [8] et [9] pour plus de précisions.

Dans le cas de Schrödinger, le symbole principal est celui du Laplacien. On aurait pourtant besoin de prendre en compte l'effet du temps. Isakov a alors prouvé dans [10] des inégalités de Carleman générales dans le cas anisotrope : on donne un poids différent à certaines variables. Le symbole principal de l'opérateur de Schrödinger devient alors  $p = \sigma - g^{ij}\xi_i\xi_j$ . Les hypothèses de pseudo-convexité anisotrope sont alors du même type sauf que l'on ne prend en compte que les dérivées par rapport aux variables de plus grand poids, c'est à dire en espace dans notre cas.

Par exemple, les conditions sur  $\Phi$  que l'on vient d'écrire dans les 2 paragraphes précédents pour  $\mathbb{T}^2$  et  $S^2$  se réécrivent en fait

$$\{p, \{p, \Phi\}\} > 0$$

et sont donc des versions faibles de la condition (57) anisotrope (où les crochets de Lie ne font intervenir que les dérivées en espace).

On pourra aussi se référer à [11] pour une présentation générale des résultats connus sur le problème du prolongement unique.

Cependant, ces théorèmes de prolongement unique ne sont valables que pour Schrödinger avec un terme de potentiel dans  $L^\infty$ . Ceci est suffisant dans le cas de l'article originel [2] où on a besoin du prolongement unique pour la stabilisation. Le théorème de prolongement de la régularité nous montre alors que le potentiel est en fait  $C^\infty$ .

Cependant, dans la démarche que l'on a choisi de suivre, le potentiel de l'équation que l'on veut contrôler est a priori seulement dans  $L^2([0, T], H^1(M)) \cap L^2([0, T], L^\infty(M))$ . Pour avoir un théorème de prolongement unique, on fait alors appel à un travail de H. Koch et D. Tataru [6]. Grâce à des estimations de dispersion sur les solutions de Schrödinger, ils prouvent ainsi des inégalités de Carleman  $L^p$ , ce qui permet d'avoir des théorèmes de prolongement unique. Les conditions géométriques qui apparaissent sont alors les mêmes que dans le cadre  $L^2$ . La régularité minimale pour les potentiels est alors  $L^2([0, T], L^2(M))$  pour la dimension 2, ce qui est largement suffisant pour notre cas.

## 8 Divers

### 8.1 Adaptation du lemme du piège

On rappelle le lemme du piège "classique" :

**Lemme 7** *Si une classe de fonctions continues  $r$  à but positif vérifient pour un  $l \in \mathbb{N}^*$ , l'inégalité  $r(T) \leq A + Br(T)^{1+l}$  pour tout  $t \in [0, T]$  et pour  $A > 0$ . Alors si  $A < C_l B^{-1/l}$  et  $r(0) < C_l B^{-1/l}$ , elles vérifient aussi l'inégalité  $r(t) \leq \tilde{C}_l A$ .*

**Lemme 8** *Soit  $\lambda > 0$ . Si une classe de fonctions  $r$  vérifient pour un  $l \in \mathbb{N}$ ,  $C$  fixé, l'inégalité*

$$\|r\|_{Y_{[t_1, t_2]}} \leq B + C\|r(t_1)\|_{H^1(M)} + C(t_2 - t_1)^\lambda (\|r\|_{Y_{[t_1, t_2]}} + \|r\|_{Y_{[t_1, t_2]}}^{1+l})$$

*pour tout  $t_1, t_2 \in [0, T]$  et pour  $B > 0$ .*

*Alors, si  $B < C_{l,T}$ , et  $\|r(0)\|_{H^1(M)} < C_{l,T}$  elle vérifie aussi l'inégalité*

$$\|r\|_{Y_T} < \tilde{C}_{l,T} (\|r(0)\|_{H^1(M)} + B)$$

**Dem :** On découpe  $[0, T]$  en petits intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  tels que  $C(t_{i+1} - t_i)^\lambda < 1/2$ . En particulier pour  $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\|r\|_{Y_{[t_i, t]}} \leq B + C\|r(t_i)\|_{H^1(M)} + \frac{1}{2}(\|r\|_{Y_{[t_i, t]}} + \|r\|_{Y_{[t_i, t]}}^{1+l})$$

Donc

$$\|r\|_{Y_{[t_i, t]}} \leq 2B + 2C\|r(t_i)\|_{H^1(M)} + 2\|r\|_{Y_{[t_i, t]}}^{1+l}$$

Si  $l \neq 0$ , on peut appliquer le lemme du piège précédent sur chaque intervalle :

Si  $\|r(t_i)\|_{H^1(M)} < C_l$  et  $B < C_l$ , alors  $\|r\|_{Y_{[t_i, t_{i+1}]}} < \tilde{C}_l (\|r(t_i)\|_{H^1(M)} + B)$ .

Or  $\|r(t_i)\|_{H^1(M)} \leq \|r\|_{Y_{[t_{i-1}, t_i]}}$  par définition. Donc, on obtient :

Si  $\|r\|_{Y_{[t_{i-1}, t_i]}} < C_l$  et  $B < C_l$ , alors  $\|r\|_{Y_{[t_i, t_{i+1}]}} < \tilde{C}_l (\|r\|_{Y_{[t_{i-1}, t_i]}} + B)$ .

Tant que les termes sont assez petits, on a donc une majoration par une suite géométrique de raison  $\tilde{C}_l$ . Or, le nombre d'intervalles ne dépend que de  $T$ .

Si  $B$  et  $\|r(0)\|_{H^1(M)}$  assez petits, on a donc une majoration  $\|r\|_{Y_{[t_i, t_{i+1}]}} < C_{l,T}(\|r(0)\|_{H^1(M)} + B)$  et donc par somme finie

$$\|r\|_{Y_T} < \tilde{C}_{l,T}(\|r(0)\|_{H^1(M)} + B)$$

Si  $l = 0$ , on a directement la majoration par une suite géométrique pour les petits intervalles et on somme de la même manière.

## 8.2 Un lemme de Lions-Aubin

Voici deux lemmes bien utiles pour les équations d'évolution.

**Lemme 9** *Soit  $(u_n)$  une suite bornée de  $L^\infty([0, T], H^s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et telle que  $\partial_t u_n$  est bornée faiblement dans  $\mathcal{D}'(M)$  uniformément en  $t$  (cad  $\langle \partial_t u_n(t), \varphi \rangle \leq C_\varphi$ ). Alors, il existe  $u(t) \in L^\infty([0, T], H^s)$  et une sous-suite  $(u_{n_k})$  telle que pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ ,  $u_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t)$  dans  $H^s$ .*

**Démonstration :** Comme  $H^{-s}$  est séparable, on peut trouver une suite  $(\varphi_l)_{l \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $C_0^\infty(M)$  dense dans  $H^{-s}$ .

Pour  $l$  fixé, on écrit  $u_n(t) - u_n(s) = \int_s^t \partial_t u_n(\tau) d\tau$ , donc  $\langle u_n(t) - u_n(s), \varphi_l \rangle = \int_s^t \langle \partial_t u_n(\tau), \varphi_l \rangle d\tau \leq C_{\varphi_l} |t - s|$ . Donc, à  $l$  fixé, la suite,  $\langle u_n(t), \varphi_l \rangle$  est équi-continue dans  $C([0, T], \mathbb{R})$ . Or, comme la suite  $(u_n)$  est une suite bornée de  $L^\infty([0, T], H^s)$  et par l'injection continue de  $H^s$  dans  $\mathcal{D}'(M)$ , la suite  $\langle u_n(t), \varphi_l \rangle$  est donc bornée à  $t$  fixé. Par le théorème d'Ascoli, on peut donc en extraire une sous-suite convergente dans  $C([0, T], \mathbb{R})$ .

Par un procédé diagonal, on peut donc extraire une suite  $u_{n_k}$  telle que  $\forall l \in \mathbb{N}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\langle u_{n_k}(t), \varphi_l \rangle \rightarrow \langle u(\varphi_l, t) \rangle$  où  $u(\varphi_l, t)$  est une fonction continue de  $t$  et linéaire en  $\varphi_l$ . D'autre part, on a, comme  $(u_n)$  bornée dans  $L^\infty([0, T], H^s)$  donc  $\langle u_{n_k}, \varphi_l \rangle \leq C \|\varphi_l\|_{H^{-s}}$ .  $u(\cdot, t)$  est donc une forme linéaire définie sur  $\text{Vect } \varphi_l$  continue pour la norme  $H^{-s}$ . On peut donc la prolonger par densité en une fonction  $u(t) \in L^\infty([0, T], H^s)$ .

On a alors, pour tout  $t \in [0, T]$  et pour tout  $\varphi \in H^s$

$$\begin{aligned} \langle u_{n_k}(t) - u(t), \varphi \rangle &= \langle u_{n_k}(t) - u(t), \varphi - \varphi_l \rangle + \langle u_{n_k}(t) - u(t), \varphi_l \rangle \\ &\leq C \|\varphi - \varphi_l\|_{H^s} + \langle u_{n_k}(t) - u(t), \varphi_l \rangle \end{aligned}$$

Qui peut être rendu aussi petit que l'on veut puisque les  $\varphi_l$  sont denses dans  $H^{-s}$  et par définition de  $u(t)$ . On a donc  $u_{n_k}(t) \xrightarrow{H^s} u(t)$  pour tout  $t$ .

**Lemme 10** *Soit  $E, F, G$  trois espaces de Banach tels que  $E \xrightarrow{i_1} F \xrightarrow{i_2} G$  avec  $i_1$  compacte et  $i_2$  continue.*

*Soit  $u_n$  une suite bornée de  $L^\infty([0, T], E)$ , telle que  $\partial_t u_n$  est bornée dans  $L^p([0, T], G)$ ,  $p > 1$ .*

*Alors, il existe  $u \in L^\infty([0, T], E)$  une sous-suite de  $u_n$  telle que pour tout  $t$  de  $[0, T]$ ,  $u_{n_k}(t) \xrightarrow{F} u(t)$ , uniformément en  $t$ .*

**Démonstration :** On prouve d'abord que pour tout  $\varepsilon$ , il existe un  $C_\varepsilon$  tel que  $\forall u \in E$

$$\|u\|_F \leq \varepsilon \|u\|_E + C_\varepsilon \|u\|_G$$

En effet, supposons le contraire, il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N} \exists v_n$  avec  $\|v_n\|_F = 1$  tel que

$$1 > \varepsilon \|v_n\|_E + n \|u\|_G$$

En particulier,  $\|v_n\|_E < 1/\varepsilon$ . Par injection compacte de  $E$  dans  $F$ , on peut en extraire une sous-suite  $v_{n_k}$  telle que  $v_{n_k} \xrightarrow{F} v$ . Par injection continue de  $F$  dans  $G$ , on a donc  $v_{n_k} \xrightarrow{G} v$ . Or, on a  $\|v_n\|_G < 1/n$ , donc  $u = 0$ , ce qui contredit  $\|v_n\|_F = 1$ .

La suite  $u_n(t)$  est bornée dans  $E$  (notons  $\|u(t)\|_E \leq C_E$ ) donc dans  $G$ .

La suite  $\partial_t u_n$  étant bornée dans  $L^p([0, T], G)$ ,  $p > 1$ , on prouve que la suite  $u_n$  est équicontinue dans  $C([0, T], G)$  et donc par le théorème d'Ascoli qu'il en existe une sous-suite convergente dans  $C([0, T], G)$  :  $\|u_{n_k} - u\|_{L^\infty([0, T], G)} \rightarrow 0$ .

Soit  $\eta > 0$ . On choisit un  $C_\varepsilon$  avec un  $\varepsilon = \eta/(4C_E)$ . A partir d'un certain rang, on a donc  $C_\varepsilon \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_G \leq \eta/2$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_F &\leq \varepsilon \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_E + C_\varepsilon \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_G \\ &\leq \eta/2 + \eta/2 \leq \eta \end{aligned}$$

Donc  $\forall t \in [0, T]$ ,  $u_{n_k}(t) \xrightarrow{F} u(t)$ , uniformément en  $t$ .

**Remarque 15** Cela s'applique en particulier au cas où les 3 espaces sont des  $H^s$ .

### 8.3 Quelques réflexions sur le propagateur

**Remarque 16** Si on a seulement l'hypothèse (A), on peut démontrer l'inégalité

$$\|u_0\|_{H^1(M)}^2 \leq C(A) \int_0^T \|\varphi u(t)\|_{H^1(M)}^2 dt + \|(1 - \Delta)^{-1} u_0\|_{H^1(M)}^2$$

Avec  $f, g$  bornés par  $A$  dans  $L^2([0, T], H^1(M) \cap L^2([0, T], L^\infty(M)))$  Ce qui entraîne que à  $f, g$  fixés, l'ensemble  $N_{f,g}$  est de dimension finie où

$$N_{f,g} = \{u_0 \in H^1(M) : \varphi u = 0 \text{ sur } ]0, T[ \times M\}$$

où  $u$  est une solution de 9 avec  $f \in L^2([0, T], H^1(M) \cap L^2([0, T], L^\infty(M)))$ , idem pour  $g$ .

**Dem :** Par l'absurde. Soit  $(u_n)$  une suite de solutions de

$$i\partial_t u_n + \Delta u_n + \bar{f}_n u_n - g_n \bar{u}_n = 0$$

tels que  $\|u_n(0)\|_{H^1(M)}^2 = 1$ ,  $\|f_n\|_{L^2([0, T], H^1(M))} \leq A$  et  $\|f_n\|_{L^2([0, T], L^\infty(M))} \leq A$  idem pour  $g_n$  et  $\varphi u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2([0, T], H^1(M))$ ,  $\|(1 - \Delta)^{-1} u_0\|_{H^1(M)}^2 \rightarrow 0$ .

Comme  $u_n(0)$  est bornée dans  $H^1(M)$ , par le théorème d'existence et comme les  $f_n$ ,  $g_n$  sont bornées dans les bons espaces,  $(u_n)$  est bornée dans  $L^\infty([0, T], H^1(M))$ . Comme  $\partial_t u_n$  borné dans  $H^{-1}$  (remarque 3), par le lemme 9 d'Aubin-Lions, on peut en extraire une sous-suite telle que pour tout  $t$ ,  $u_n(t)$  est faiblement convergente dans  $H^1(M)$ . Comme la donnée initiale converge vers 0 grâce au deuxième terme, on en conclut que la limite faible est 0.

Or  $\varphi u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2([0, T], H^1(M))$  donc,  $u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2([0, T], H^1(\omega))$ . Donc, par le corollaire 1 (que l'on adapte au cas  $H^1(M)$ ),  $u_n$  converge fortement vers 0 dans  $L^\infty([0, T], H^1(M))$ , ce qui contredit  $\|u_n(0)\|_{H^1(M)}^2 = 1$ .

Prouvons  $N_{f,g}$  de dimension finie.

D'abord,  $N_{f,g}$  est bien un sous-espace vectoriel réel par linéarité réelle de l'équation.

En effet, on a par l'inégalité que l'on vient de prouver,

$$\forall u_0 \in N_{f,g} \quad \|u_0\|_{H^1} \leq \|u_0\|_{H^{-1}}$$

Donc on a  $B_{H^{-1}}(0, 1) \cap N \subset B_{H^1}(0, C) \cap N$ .

Or, par l'injection compacte  $B_{H^1}(0, C) \subset B_{H^{-1}}(0, \tilde{C})$  et  $B_{H^1}(0, C)$  est relativement compacte dans  $H^{-1}$ .

Donc  $B_{H^{-1}}(0, C) \cap N_{f,g}$  est relativement compacte dans  $N_{f,g}$  munie de la topologie issue de la norme de  $H^{-1}$ .

$B_{H^{-1}}(0, 1) \cap N_{f,g}$  est donc fermée dans le compact  $\overline{B_{H^1}(0, C) \cap N_{f,g}}$ . Donc, si on munit  $N_{f,g}$  de la norme issue de  $H^{-1}$ , la boule unité est compacte.

Donc par le théorème de Riesz,  $N_{f,g}$  est de dimension finie.

**Théorème 13** Soit  $\omega$  satisfaisant (A) et  $f \in L^2([0, T], H^1(M)) \cap L^2([0, T], L^\infty(M))$ , idem pour  $g$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{On note } \phi_{f,g} & : & H^1(M) \rightarrow L^2([0, T], H^1(\omega)) \\ & & u_0 \mapsto \varphi u \end{array}$$

où  $u$  est solution de l'équation

$$i\partial_t u + \Delta u + f u + g \bar{u} = 0$$

Alors,  $\phi_{f,g}$  est à image fermée.

**Dem :** Soit  $N_{f,g} = \text{Ker } \phi_{f,g}$ . Notons  $F_{f,g} = N_{f,g}^\perp$ .  $N_{f,g}$  étant fermé, on a  $H^1(M) = N_{f,g} \oplus^\perp F_{f,g}$ .

On définit  $\tilde{\phi}$  la restriction de  $\phi$  à  $F$ .  $\tilde{\phi}$  est donc injective et  $\text{Im } \phi = \text{Im } \tilde{\phi}$ . On doit donc montrer qu'on a une inégalité d'observabilité pour  $\tilde{\phi}$  :

$$\|u_0\|_{H^1(M)}^2 \leq C(f, g) \int_0^T \|\varphi u(t)\|_{H^1(M)}^2 dt \quad \forall u_0 \in F_{f,g}$$

**Dem :** On raisonne encore par l'absurde. Soit  $(u_n)$  une suite de solutions de

$$i\partial_t u_n + \Delta u_n + \bar{f} u_n - g \bar{u}_n = 0$$

telles que  $u_n(0) \in F$ ,  $\|u_n(0)\|_{H^1(M)}^2 = 1$ , et  $\varphi u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2([0, T], H^1(M))$ . Comme  $(u_n)$  est bornée dans  $L^\infty([0, T], H^1(M))$ , par le même raisonnement que précédemment, on en extrait une sous suite telle que pour tout  $t \in [0, T]$   $u_n(t) \rightharpoonup u$  dans  $H^1(M)$ . On peut aussi en extraire une sous-suite telle que la convergence soit forte dans  $C([0, T], H^{-1}(M))$ . Par passage à la limite au sens des distributions dans l'équation, et comme les  $f$  et  $g$  sont fixés, on en déduit que  $u$  est solution de l'équation. Or, comme en particulier,  $u_n(0) \rightharpoonup u$  dans  $H^1(M)$ , et que  $F_{f,g}$  est faiblement fermé, (car fortement fermé et convexe), on en déduit  $u \in F_{f,g}$ . Or, comme en plus,  $\varphi u = 0$  par passage à la limite, on obtient donc  $u = 0$  par définition de  $F_{f,g}$ . Donc,  $u_n(0) \rightharpoonup 0$  dans  $H^1(M)$ . En particulier, il existe une sous-suite encore notée  $u_n$ , telle que  $u_n(0) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}$ . En appliquant l'inégalité de la remarque 16, on a  $\|u_0\|_{H^1(M)} \rightarrow 0$ . Contradiction avec  $\|u_n(0)\|_{H^1(M)} = 1$ . Ceci démontre alors l'inégalité d'observabilité et par cela le fait que l'image de  $\phi$  est fermée.

Les  $\phi_{f,g}$  sont donc des opérateurs à noyaux de dimension finie et à image fermée.

Examinons maintenant la dépendance en  $f$  et  $g$  et montrons que l'application qui à  $(f, g)$  envoie  $\phi_{f,g}$  est continue. Plus précisément :

**Lemme 11** *Soit  $A$  tel que  $\|f\|_{L^2(L^\infty(M))} + \|f\|_{L^2(H^1(M))} \leq A$ , de même pour  $f_0, g, g_0$ . Soit  $\varepsilon_1$  tel que  $\|f - f_0\|_{L^2(L^\infty(M))} + \|f - f_0\|_{L^2(H^1(M))} \leq \varepsilon_1$ , de même pour  $g$  et  $g_0$ . Soit  $h$  et  $h_0$  dans  $L^1(H^1(M))$  tels que  $\|h - h_0\|_{L^1(H^1(M))} \leq \varepsilon_2$ . Si  $u$  et  $v$  sont solutions de*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f u + g \bar{u} &= h \\ u(0) &= u_0 \in H^1(M) \end{cases} \quad (58)$$

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v + f_0 v + g_0 \bar{v} &= h_0 \\ v(0) &= v_0 \in H^1(M) \end{cases} \quad (59)$$

Avec  $\|u_0 - v_0\|_{H^1(M)} \leq \varepsilon_3$ .

Alors, il existe  $C = C(A)$  tel que

$$\|u - v\|_{Y_T} \leq C(\varepsilon_1(\|u_0\|_{H^1(M)} + \|h\|_{L^1(H^1)}) + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

**Dem :** Notons  $r = v - u$ .  $r$  est alors solution de

$$\begin{cases} i\partial_t r + \Delta r + f_0 r + g_0 \bar{r} &= -(f_0 - f)u - (g_0 - g)\bar{u} + (h_0 - h) \\ r(0) &= v_0 - u_0 \in H^1(M) \end{cases} \quad (60)$$

En particulier, par les inégalités sur les solutions linéaires, remarque 1, on a :

$$\begin{aligned}
\|r\|_{Y_T} &\leq C\|u_0 - v_0\|_{H^1(M)} + C \int_0^T \|(f_0 - f)u\|_{H^1(M)} + C \int_0^T \|(g_0 - g)\bar{u}\|_{H^1(M)} \\
&\quad + C \int_0^T \|h_0 - h\|_{H^1(M)} \\
&\leq C\|u_0 - v_0\|_{H^1(M)} + \|f_0 - f\|_{L^2(L^\infty(M))} \|u\|_{L^2(H^1(M))} + \|f_0 - f\|_{L^2(H^1(M))} \|u\|_{L^2(L^\infty(M))} \\
&\quad + \|g_0 - g\|_{L^2(L^\infty(M))} \|u\|_{L^2(H^1(M))} + \|g_0 - g\|_{L^2(H^1(M))} \|u\|_{L^2(L^\infty(M))} + \|h_0 - h\|_{L^1(H^1(M))} \\
&\leq C\varepsilon_3 + C\varepsilon_1 \|u\|_{Y_T} + C\varepsilon_2 \\
&\leq C\varepsilon_3 + C\varepsilon_1 (\|u_0\|_{H^1(M)} + \|h\|_{L^1(H^1)}) + C\varepsilon_2
\end{aligned}$$

◇

Comme pour  $f = g = 0$ ,  $\phi_{0,0}$  est injectif, on peut prouver que pour  $(f, g)$  petits,  $\phi_{f,g}$  le sera aussi.

Soit  $(f_0, g_0)$  un point où  $\phi_{f_0, g_0}$  est injectif.

Pour  $(f, g)$  proche de  $(f_0, g_0)$ .

Notons  $K_{f,g} = \phi_{f_0, g_0} \circ \Pi_{f,g}$  où  $\Pi_{f,g}$  est la projection orthogonale sur  $F_{f,g}$ .

$K_{f_0, g_0} = \phi_{f_0, g_0}$  que l'on a restreint à son image. Il est donc supposé bijectif.

Or, si  $u_0 = \Pi_{f,g} u_0 + k_0$  avec  $k_0 \in \text{Ker } \phi_{f,g}$  alors

$$(K_{f,g} - \phi_{f_0, g_0})u_0 = \Phi_{f_0, g_0} k_0$$

Or,

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{f_0, g_0} k_0\|_{L^2(H^1(\omega))} &= \|(\Phi_{f_0, g_0} - \Phi_{f,g})k_0\|_{L^2(H^1(\omega))} \\
&\leq C\|(\Phi_{f_0, g_0} - \Phi_{f,g})k_0\|_{Y_T} \\
&\leq C(A)\|f - f_0\| \|k_0\|_{H^1(M)} \\
&\leq C(A)\|f - f_0\| \|u_0\|_{H^1(M)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|(K_{f,g} - \phi_{f_0, g_0})u_0\|_{L^2([0,T], H^1(M))} \leq C(A)\|f - f_0\| \|u_0\|_{H^1(M)}$$

Donc en particulier, si  $(f, g)$  assez proche de  $(f_0, g_0)$ ,  $K_{f,g}$  est proche de  $K_{f_0, g_0} = \Phi_{f_0, g_0}$  donc est bijectif, donc  $\Pi_{f,g}$  est injectif, donc  $\Phi_{f,g}$  est injectif.

L'ensemble des  $(f, g)$  tels que  $N_{f,g} = \{0\}$  est donc un ouvert qui contient  $(0, 0)$ .

D'autre part, par changement de variable, on peut aussi montrer qu'il contient aussi toutes les fonctions  $(f(t), g(t))$  ne dépendant que du temps.

## 8.4 Lemme classique de propagation

On prouve un lemme classique utile dans les problèmes de propagation, et en particulier utilisé dans [2] pour la propagation de la régularité.

**Lemme 12** Soit  $\omega_0 \in T^*M$ ,  $\Gamma_{\omega_0}(t)$  la bicaractéristique partant de  $\omega_0$  pour le symbole  $\sigma(\Delta)$ . On peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que si  $0 < t < \varepsilon$ ,  $\omega_1 = \Gamma_{\omega_0}(t)$ , et  $V$  voisinage conique assez petits de  $\omega_1$ , on ait un voisinage  $U$  de  $\omega_0$  tel que pour tout symbole  $c(x, \xi)$  homogène d'ordre  $s$ , supporté dans  $U$ , il existe un autre symbole  $b(x, \xi)$  homogène d'ordre  $s - 1$  tel que

$$\frac{1}{i} \{ \sigma(\Delta), b \} (x, \xi) = c(x, \xi) + r(x, \xi)$$

où  $r$  est d'ordre  $s$  et supporté dans  $V$ .

**Démonstration :** On cherche en fait  $b$  tel que

$$H_{\sigma(\Delta)}b = ic + ir$$

$\sigma(\Delta)$  étant strictement positif et homogène de degré 2, il existe  $p$  elliptique et homogène de degré 1 tel que  $p^2 = \sigma(\Delta)$ .

On a  $\{ \sigma(\Delta), b \} = - \{ b, p^2 \} = -H_b p^2 = -2p H_b p = 2p H_p b$ .

$p$  étant elliptique, il suffit de trouver  $b$  et  $r$  tels que

$$H_p b = \frac{ic}{2p} + \frac{ir}{2p}$$

On est donc ramené au problème :

Soit  $p$  réel homogène elliptique de degré 1,  $\tilde{c}$  homogène d'ordre  $s - 1$  à support dans un petit voisinage conique  $U$  de  $\omega_0$ . On doit trouver  $b$  d'ordre  $s - 1$  et  $\tilde{r}$  d'ordre  $s - 1$  et à support dans  $V$  tel que

$$H_p b = \tilde{c} + \tilde{r}$$

Or,  $H_p$  et  $\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}$  sont linéairement indépendants.

En effet, si on note  $G(x) = g^{ij}(x)$  la matrice des coefficients de  $\sigma(\Delta) = \sum g^{ij} \xi_i \xi_j = {}^t \xi G \xi$ , on a  $\partial_\xi \sigma(\Delta) = G \xi$  qui est non nul si  $\xi$  est non nul car  $G$  est inversible.

Donc  $H_p$  a une composante selon  $\frac{\partial}{\partial x}$  et est donc indépendant de  $\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}$ .

En particulier, on peut appliquer le théorème de Darboux homogène (voir [7] p 99) :

Il existe une transformation symplectique locale homogène, centrée en  $\omega_0$

$$\Phi(x, \xi) = (y_1(x, \xi), \dots, y_n(x, \xi), \eta_1(x, \xi), \dots, \eta_m(x, \xi))$$

Avec  $y_i$  homogène en  $\xi$  de degré 0,

$\eta_i$  homogène en  $\xi$  de degré 1,

$\eta_1(x, \xi) = p(x, \xi)$  et  $y(\omega_0) = 0$ .

A partir de maintenant, on définira les fonctions sur  $T^*M$  dans les coordonnées  $(y_i, \eta_i)$ . On aura alors  $H_p = H_{\eta_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}$ . Comme  $\omega_1 = \Gamma_{\omega_0}(t_0)$ , dans les nouvelles coordonnées cela donne  $\omega_1 = \omega_0 + t_0 \frac{\partial}{\partial y_1}$ .

On peut choisir  $\varepsilon$  puis  $V$  voisinage de  $\omega_1 = \Gamma_{\omega_0}(t_0)$ , ( $0 < t_0 < \varepsilon$ ) assez petit tels que  $V + t \frac{\partial}{\partial y_1}$  soient compactement inclus dans le domaine de la carte  $\Phi$



pour  $t \in [-2\varepsilon, \varepsilon]$ . On choisit  $0 < \varepsilon_1 < t_0/2$  et  $O$  ouvert conique de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\omega_1 + ] - \varepsilon_1, \varepsilon_1[ \times O \subset V$ . On choisit ensuite  $U = ] - \varepsilon_1, \varepsilon_1[ \times O$ . De sorte qu'il vérifie :

$$U \subset \{y_1 < \varepsilon_1\} \subset \{y_1 < t_0 - \varepsilon_1\} \text{ et } \\ \{t_0 - \varepsilon_1 \leq y_1 \leq t_0 + \varepsilon_1\} \cap \left\{U + t \frac{\partial}{\partial y_1}; t \in [0, +\infty[ \right\} = \omega_1 + ] - \varepsilon_1, \varepsilon_1[ \times O \subset V$$

Etant donné  $\tilde{c}$  à support dans  $U$ , on définit :

$$\tilde{b}(y_1, \dots, y_n, \eta_1, \dots, \eta_n) = \int_{-\infty}^{y_1} \tilde{c}(t, y_2, \dots, y_n, \eta_1, \dots, \eta_n) dt \quad (61)$$

$\tilde{b}$  est alors supporté dans  $\left\{U + t \frac{\partial}{\partial y_1}; t \in [0, +\infty[ \right\}$

Soit  $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\Psi(t) = 1$  pour  $t \leq t_0 - \varepsilon_1$  et  $\Psi(t) = 0$  pour  $t \geq t_0 + \varepsilon_1$ . On choisit  $b(y, \eta) = \Psi(y_1) \tilde{b}(y, \eta)$ , que l'on définit a priori sur le domaine de la carte  $\Phi$ .

Calculons

$$H_p b(y, \eta) = \frac{\partial}{\partial y_1} b = \Psi(y_1) \tilde{c}(y, \eta) + \Psi'(y_1) \tilde{b}(y, \eta)$$

Comme  $\Psi(y_1) = 1$  pour  $y_1 \leq t_0 - \varepsilon_1$  donc en particulier sur  $U$ , on a

$$\Psi(y_1) \tilde{c}(y, \eta) = \tilde{c}(y, \eta)$$

De plus,  $\Psi'(y_1) \tilde{b}$  est à support dans

$$\{t_0 - \varepsilon_1 \leq y_1 \leq t_0 + \varepsilon_1\} \cap \left\{U + t \frac{\partial}{\partial y_1}; t \in [0, +\infty[ \right\} \subset V.$$

En notant  $\tilde{r} = \Psi'(y_1) \tilde{b}$ , on a donc bien  $\tilde{r}$  à support dans  $V$ .

De plus, si le symbole  $\tilde{c}$  est d'ordre  $s - 1$  en  $\eta$ , par la formule (61),  $\tilde{r}$  et  $\tilde{b}$  le sont aussi, et par changement de variable homogène, elles le sont aussi en la variable  $\xi$ .

Cependant, ces trois symboles ne sont a priori définis que sur l'ouvert de carte correspondant à  $\Phi$  et on voudrait les étendre sur  $T^*M$  tout entier.  $\tilde{r}$  ayant  $V$  pour support, on peut facilement l'étendre de façon  $C^\infty$ . Le support de  $b$  est quant à lui inclus dans

$$\{y_1 \leq t_0 + \varepsilon_1\} \cap \left\{U + t \frac{\partial}{\partial y_1}; t \in [0, +\infty[ \right\} \subset \left\{V + t \frac{\partial}{\partial y_1}; t \in ] - 2\varepsilon, \varepsilon[ \right\}$$

qui est compactement inclus dans la carte par choix.

## 9 Remerciements

Je remercie ici mon maître de stage Patrick GERARD, d'avoir accepté de m'encadrer pour ce stage et pour la thèse future. J'ai beaucoup apprécié la clarté de ses explications et son enthousiasme communicatif. Cela a particulièrement contribué à rendre ce stage instructif, passionnant et motivant pour la suite...

## Références

- [1] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov : Strichartz Inequalities and the non-linear Schrödinger equation on compact manifolds, American Journal of Mathematics. 126 (2004), 569-605
- [2] B. Dehman, P. Gérard, et G. Lebeau : Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface, Mathematische Zeitschrift, Volume 254, Number 4 / December, 2006, 729-749.
- [3] N. Burq et M. Zworski : Geometric control in the presence of a black box, Journal of the American Mathematical Society, vol 17, 2, 443-471
- [4] S. Jaffard : Contrôle interne exacte des vibrations d'une plaque rectangulaire, Portugal. Math. 47 (1990), no.4, 423-429. MR 27 :4019
- [5] N. Burq, P. Gérard : Contrôle optimal des équations aux dérivées partielles, Cours de l'Ecole Polytechnique. 2002.
- [6] H. Koch et D. Tataru : Dispersive estimates for principally normal pseudo-differential operators, Comm. Pure and Appl. Math. 58 2 (2005), 217-284.
- [7] A. Grigis et J. Sjöstrand : Microlocal Analysis for Differential Operators, An Introduction , Cambridge University Press
- [8] L. Hörmander : Linear Partial Differential Operators IV, Springer
- [9] L. Hörmander : The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV, Springer-Verlag
- [10] V. Isakov : Carleman Type Estimates in an Anisotropic Case and Applications, Journal Of Differential Equations, 105(2) :217-238, 1993
- [11] D. Tataru : Unique continuation problems for partial differential equations, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications 137, 239-255, 2003